X Mathem

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 173

Heft 3

Ausgegeben den 15. August 1935

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1935

Band 173. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Neumer, Walter, Die allgemeinste mit der projektiven G_8 der Ebene ähnliche Gruppe von Berührungstransformationen 125

Rembs, Eduard, Die infinitesimalen Verbiegungen der Kugel 160

Reidemeister, Kurt, Überdeckungen von Komplexen 164

Franz, Wolfgang, Überdeckungen topologischer Komplexe mit hyperkomplexen Systemen 174

Wegner, Udo, Über das Verhalten der Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung hinsichtlich ihrer Gruppe 185

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10
Printed in Germany

Die allgemeinste mit der projektiven G_8 der Ebene ähnliche Gruppe von Berührungstransformationen.

Von *Walter Neumer* in Worms.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem speziellen Problem der von Lie begründeten Theorie der Transformationsgruppen. Es handelt sich um eine Untersuchung über die gemeinschaftlichen Eigenschaften aller Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene, die mit der achtgliedrigen projektiven Gruppe *ähnlich* sind, d. h. in diese durch geeignete Variablentransformation übergeführt werden können. Wie in der Lieschen Theorie üblich, stehen hierbei nicht die endlichen, sondern die infinitesimalen Transformationen im Mittelpunkt der Betrachtungen.

Die Gruppentheorie interessiert sich weniger für die einzelnen Gruppen selbst als vielmehr für die verschiedenen *Typen* von Gruppen, d. h. für die Frage nach der Ähnlichkeit oder Unähnlichkeit zweier oder mehrerer Gruppen. Unter diesem Gesichtspunkt sind z. B. alle endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen eines R_n als implizit bekannt anzusehen, wenn man eine konkrete Reihe von Gruppen des R_n angeben kann derart, daß jede beliebige endliche kontinuierliche Gruppe des R_n mit einer dieser Gruppen ähnlich ist. Eine solche Bestimmung der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Transformationen einer Mannigfaltigkeit wurde von Lie in speziellen Fällen durchgeführt, u. a. in der Ebene, und zwar dort sowohl in bezug auf die Punkt- wie in bezug auf die Berührungstransformationen. Die Gruppen der letzteren nennt Lie *reduzibel* oder *irreduzibel*, je nachdem sie mit Gruppen von Punkttransformationen ähnlich sind oder nicht.

Indessen ist mit der Angabe eines konkreten Vertreters für einen Gruppentyp noch keine allgemeine explizite Darstellung geleistet, die für alle Gruppen des Typus gültig wäre. Engel [1]) hat nun darauf hingewiesen, daß es ja die Möglichkeit gibt, die Gruppen eines Typs allgemein und explizit zu charakterisieren durch Angabe der allgemeinen Struktur der *Definitionsgleichungen* für die infinitesimalen Transformationen der Gruppen des Typus. Diese Definitionsgleichungen sind, was hier als bekannt vorausgesetzt werden muß, lineare homogene partielle Differentialgleichungen für die Größen $\xi_i(x_1, \ldots, x_n)$ in dem Symbol

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

der allgemeinen infinitesimalen Transformation einer Gruppe des R_n. Ebenso wird als bekannt vorausgesetzt, daß eine infinitesimale Berührungstransformation völlig bestimmt ist durch Angabe ihrer sogenannten *charakteristischen Funktion*, und daß die Definitionsgleichungen einer Gruppe von Berührungstransformationen lineare homogene partielle Differentialgleichungen für ihre allgemeine charakteristische Funktion sind.

[1]) F. Engel, Über die Definitionsgleichungen der kontinuierlichen Transformationsgruppen. Habilitationsschrift Leipzig (1885).

Mit der Kenntnis ihrer Definitionsgleichungen beherrscht man eine Gruppe vollständig; man kann dann sowohl ihre Differentialinvarianten wie die Definitionsgleichungen ihrer Untergruppen aufstellen — theoretisch wenigstens. Bei den Berührungstransformationsgruppen der Ebene vom Typ der projektiven G_8 läßt sich dieses Programm auch praktisch in ziemlich ausgedehntem Umfange durchführen; dieser Aufgabe dienen die folgenden Untersuchungen.

Sie beginnen in § 1 mit der Einführung gewisser Operationen $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ an Stelle der Operationen $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y'}$, welche wegen ihrer Eignung zum Rechnen mit Berührungstransformationen bereits von Gąsiorowski [2]) verwendet worden sind. Der § 2 ist dem Nachweis gewidmet, daß die ebenen Berührungstransformationsgruppen vom Typ der projektiven G_8 dadurch charakterisiert sind, daß sie zwei gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$y'' + \alpha(x, y, y') = 0, \qquad y'' + \beta(x, y, y') = 0$$

invariant lassen. Zwischen α und β bestehen dann gewisse Relationen, deren Herleitung in § 3 erfolgt. Dabei tritt die hervorragende Rolle zutage, welche diejenigen zweigliedrigen Untergruppen in der allgemeinen G_8 spielen, denen in der projektiven G_8 die ∞^2 mit der Gruppe der *Translationen* projektiv gleichberechtigten Untergruppen entsprechen. Mit Hilfe dieser Untergruppen werden in § 5 unter anderem die Definitionsgleichungen der Berührungstransformationsgruppen vom Typ der affinen G_6 aufgestellt sowie in § 6 unter Hinzunahme des auf die allgemeine G_8 übertragenen *Dualitätsprinzips* die Charakterisierung gewisser fünfgliedriger Untergruppen der G_6 vorgenommen; diese G_5 entsprechen den ∞^1 Gruppen G_5, welche aus der affinen G_6 durch die Forderung der Invarianz eines unendlich fernen Punktes ausgeschieden werden. Der letzte Paragraph bringt die Definitionsgleichungen für die invariante G_5 der allgemeinen G_6, die mit der sogenannten *speziellen* linearen Gruppe der Ebene ähnlich ist.

§ 1. Berührungstransformationen in der Ebene.

1. Beim Rechnen mit Berührungstransformationen (B. T.n) in der Ebene ist es von großem Vorteil, die Operationen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ zu ersetzen durch

$$(1) \qquad \partial_1 f = f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \partial_2 f = f_2 = \frac{\partial f}{\partial y'}, \qquad \partial_3 f = f_3 = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Wir schreiben:

$$\partial_{i_q} \cdots \partial_{i_1} f = f_{i_1 \ldots i_q} \qquad (i_1, \ldots, i_q = 1, 2, 3).$$

Die Operationen (1) stehen mit dem Pfaffschen Ausdruck $dy - y'dx$ in dem Zusammenhang

$$(2) \qquad df = f_1 dx + f_2 dy' + f_3 (dy - y'dx).$$

Es besteht die fundamentale Beziehung

$$(3) \qquad (\partial_2 \partial_1) = f_{12} - f_{21} = f_3.$$

Aus diesem Grunde heißen $\partial_1 f, \partial_2 f$ Operationen *erster*, $\partial_3 f$ eine Operation *zweiter Stufe*.

Auf Grund der Relation (3) können alle Ableitungen $\frac{\partial^{i+j+k} f}{\partial x^i \partial y^j \partial y'^k}$ ausgedrückt werden durch die beiden Operationen $\partial_1 f, \partial_2 f$ allein. Natürlich müssen zwischen den Operationen $f_{i_1 \ldots i_q}$ $(i_1, \ldots, i_q = 1, 2)$ Beziehungen bestehen. Die vier Operationen

[2]) L. Gąsiorowski, Über die Definitionsgleichungen der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Berührungstransformationen in der Ebene, Dissertation Gießen = Prace matematyczno-fizyczne **26** (1914).

zweiter Stufe $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ sind unabhängig; für die Operationen der dritten Stufe ergeben sich aus

$$f_{31} = f_{13}, \quad f_{32} = f_{23} \tag{4}$$

die beiden Relationen:

$$2f_{121} = f_{112} + f_{211}; \quad 2f_{212} = f_{221} + f_{122}. \tag{5}$$

Die Relationen zwischen den Operationen der vierten Stufe gehen aus (5) hervor einmal durch Anwendung der Operationen $\partial_1 f, \partial_2 f$ auf (5) und zum anderen durch Einsetzen von f_i $(i = 1, 2)$ für f in (5). Analog ergeben sich sukzessive die Relationen für die Operationen der Stufe $5, 6, \ldots$ [3]).

Nähere Ausführungen über die Operationen (1) sind in der Arbeit von Gąsiorowski [4]) zu finden, in der auch der folgende Satz bewiesen ist:

Es liege ein simultanes System von partiellen Differentialgleichungen (Diffgl.n) für m Funktionen $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}$ von x, y, y' vor:

$$\Omega(x, y, y', F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}, F_1^{(1)}, \ldots, F_2^{(1)}, \ldots, F_{11}^{(1)}, \ldots) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

das geschrieben ist in den Operationen $\partial_1 f, \partial_2 f$. Es soll möglich sein, dieses System durch Differentiation — unter Verwendung der Operationen $\partial_1 f, \partial_2 f$ — und Elimination auf eine solche Form zu bringen, daß alle Operationen s-ter Stufe von $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}$ ausgedrückt erscheinen durch x, y, y' und die Operationen niedrigerer Stufe von $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}$, während dasselbe für die Operationen $(s-1)$-ter Stufe noch nicht möglich ist. Ferner sollen durch ein- und zweimalige Ausführung der Operationen $\partial_1 f, \partial_2 f$ auf das neue System nur solche Relationen zwischen x, y, y' und den Operationen nullter bis $(s-1)$-ter Stufe von $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}$ hervorgehen, die eine Folge des Systems sind.

Dies alles vorausgesetzt enthält das allgemeinste Lösungssystem $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}$ des ursprünglichen Systems nur eine endliche Anzahl von willkürlichen Konstanten, und diese Anzahl ist gleich der Anzahl von Operationen $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}, F_1^{(1)}, \ldots$, die vermöge des Systems von Diffgl.n noch willkürlich bleiben.

2. Die Transformation (Trf.)

$$\mathfrak{x} = X(x, y, y'), \quad \mathfrak{y} = Y(x, y, y'), \quad \mathfrak{y}' = P(x, y, y') \tag{6}$$

sei eine B. T., also

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}' d\mathfrak{x} = \Delta(x, y, y')\,(dy - y'dx), \quad \Delta \neq 0. \tag{7}$$

Aus (7) folgt (mit Rücksicht auf (2))

$$Y_1 = PX_1, \quad Y_2 = PX_2, \tag{8}$$

$$\Delta = P_2 X_1 - X_2 P_1. \tag{9}$$

Bei gegebenen P, X können wir die Gleichungen (8) als Diffgl.n zur Bestimmung von Y auffassen. Wir haben nur zwei aus (5) hervorgehende Integrabilitätsbedingungen (Int. Bedgg.n):

$$\begin{aligned} X_2 P_{11} + X_1 P_{12} + 2P_1 X_{21} &= P_2 X_{11} + P_1 X_{12} + 2X_1 P_{21}, \\ X_1 P_{22} + X_2 P_{21} + 2P_2 X_{12} &= P_1 X_{22} + P_2 X_{21} + 2X_2 P_{12}. \end{aligned} \tag{10}$$

Diese Relationen haben die Eigentümlichkeit, bei Vertauschung der Indizes 1, 2 in einander überzugehen; bei Vertauschung von X, P vertauschen sich in jeder einzelnen Relation die rechte und die linke Seite.

Wir schreiben nun:

$$\partial_{\mathrm{I}} f = f_{\mathrm{I}} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \mathfrak{y}' \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}, \quad \partial_{\mathrm{II}} f = f_{\mathrm{II}} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}'}, \quad \partial_{\mathrm{III}} f = f_{\mathrm{III}} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}.$$

[3]) Zur Bestimmung der Anzahl der unabhängigen Operationen s-ter Stufe $(s = 1, 2, \ldots)$ vgl. W. Neumer, Über gewöhnliche Differentialgleichungen, die lineare homogene Form erhalten können, Dissertation Gießen (1929).

[4]) A. a. O. [2]).

Dann folgt aus (2) und (7)

$$(11)\quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & f_1 = X_1 f_{\mathrm{I}} + P_1 f_{\mathrm{II}}, \quad f_2 = X_2 f_{\mathrm{I}} + P_2 f_{\mathrm{II}}, \\ \text{(b)} & f_3 = X_3 f_{\mathrm{I}} + P_3 f_{\mathrm{II}} + \Delta f_{\mathrm{III}}; \end{array}$$

$$(12)\quad \begin{array}{l} \text{(a)}\ f_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\Delta}(P_2 f_1 - P_1 f_2), \quad f_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\Delta}(-X_2 f_1 + X_1 f_2), \\ \text{(b)}\ f_{\mathrm{III}} = \frac{1}{\Delta^2}((X_2 P_3 - P_2 X_3) f_1 + (P_1 X_3 - X_1 P_3) f_2) + \frac{1}{\Delta} f_3. \end{array}$$

Die Formeln (11 a) und (12 a) sind für die Folge so wichtig, daß wir ihren wesentlichen Inhalt in einem besonderen Satze aussprechen wollen:

Satz 1. *Die Schar aller Operationen*

$$\sigma(x, y, y')\,\partial_1 f + \tau(x, y, y')\,\partial_2 f$$

bleibt gegenüber B. T.n invariant.

Die Operationen $f_{i_1 \dots i_q}$ wollen wir im folgenden gelegentlich auch als Ableitungen s-ter Stufe bezeichnen, wobei s die Stufe von $f_{i_1 \dots i_q}$ bedeutet.

Eine *infinitesimale* (inf.) B. T.

$$\frac{\delta f}{\delta t} = Xf = \xi(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y'}$$

wird bekanntlich bestimmt durch ihre *charakteristische Funktion* (ch. Fu.) $U(x, y, y')$ vermöge der Formeln

$$(13)\qquad U = y'\xi - \eta,$$

$$(14)\qquad \xi = U_{y'}, \quad \eta = y' U_{y'} - U, \quad \eta' = -U_x - y' U_y,$$

oder, unter Verwendung der Operationen (1),

$$(15)\qquad \xi = U_2, \quad \eta = y' U_2 - U, \quad \eta' = -U_1.$$

Es wird dann

$$(16)\qquad Xf = U_2 f_1 - U_1 f_2 - U f_3.$$

Sind Xf, Yf zwei inf. B. T.n mit den ch. Fu.n U, V, so lautet die ch. Fu. W der inf. B. T. (XY):

$$(17)\qquad W = \{UV\} = U_2 V_1 - V_2 U_1 - (U V_3 - V U_3).$$

Unter dem *Klammersymbol* (XY) ist dabei wie üblich folgendes verstanden: Sind Xf, Yf zwei Symbole in n Veränderlichen,

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad Yf = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so ist, wie man durch Ausrechnung bestätigt,

$$(XY) = XYf - YXf = \sum_{i=1}^{n} (X\eta_i - Y\xi_i)\frac{\partial f}{\partial x_i} = Zf.$$

Nach Lie sagt man, daß das Symbol (XY) aus den Symbolen Xf, Yf und die Funktion $\{UV\}$ aus den Funktionen U, V durch *Kombination* hervorgehen.

Werden in die inf. B. T. mit der ch. Fu. U oder, kurz gesagt, in die inf. B. T. U vermöge der B. T. (6) neue Veränderliche eingeführt, so wird die neue ch. Fu. $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$ dargestellt durch

$$(18)\qquad \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}') = \Delta(x, y, y')\,U(x, y, y'),$$

wo Δ die in (7) und (9) angegebene Größe ist.

3. Grundlegend für das Folgende ist ein Satz von Lie, der so ausgesprochen werden kann:

Satz 2. *Eine eigentliche B. T.* (6) *— d. h. eine solche, die keine erweiterte Punkttransformation* (P. T.) *ist — führt die ∞^2 Punkte der Ebene (x, y) über in eine Schar*

Hiermit bestelle ich
aus dem Verlage Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10 und Leipzig,

durch die Buchhandlung .....

.....

_____ Jaeger, Paideia. I. Bd. Geb. RM 8.--
_____ Lietzmann, Geschichte der Alten Kirche. 1. Die Anfänge. Geb. RM 7.--
_____ Erman, Die Religion der Ägypter. Geb. RM 7.50
_____ Bühler, Deutsche Geschichte. I. Geb. RM 7.20
_____ Schuchhardt, Alteuropa. Geb. RM 7.20
_____ Sammlung Göschen Nr. ----------

---------- Jeder Band geb. RM 1.62

ferner: Unterschrift, Adresse, Datum:

.....

BESTELLKARTE

Absender:	An die Buchhandlung

von ∞^2 Kurven der Ebene $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, und in der Ebene (x, y) gibt es eine Schar von ∞^2 Kurven, die vermöge (6) *in die ∞^2 Punkte $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ übergeht.*

Sei (6) eine eigentliche B. T. Dann dürfen nicht X und Y beide von y' frei sein. Aus (8) folgt übrigens, daß entweder X und Y beide von y' frei sind oder beide y' enthalten. Die Gleichung der Kurve, welche in den Punkt $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ übergeht, ergibt sich offenbar aus

$$X(x, y, y') = \mathfrak{x}_0, \qquad Y(x, y, y') = \mathfrak{y}_0 \tag{19}$$

durch Elimination von y':

$$\Omega(x, y; \mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0) = 0. \tag{19'}$$

Werden $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0$ als Parameter aufgefaßt, so stellt (19′) zugleich die Schar aller ∞^2 Kurven dar, welche in die Punkte $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ übergehen. Differentiation von (19′) nach x und Elimination von $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0$ liefert die gewöhnliche Diffgl. 2. O. dieser zweigliedrigen Kurvenschar. Aber zu dieser Diffgl. können wir auch direkt durch Differentiation von (19) gelangen:

$$X_1 + X_2 y'' = 0, \qquad Y_1 + Y_2 y'' = 0;$$

wegen (8) besteht die zweite Gleichung vermöge der ersten, so daß

$$y'' + \frac{X_1}{X_2} = 0 \tag{20}$$

die Diffgl. der Kurvenschar (19′) darstellt.

Unmittelbar an den Satz 2 schließt sich der weitere wichtige Satz von Lie an:

Satz 3. *Jede gewöhnliche Diffgl. 2. O. kann durch unbegrenzt viele B. T.n in jede andere gewöhnliche Diffgl. 2. O. transformiert werden.*

Wir wollen nun die beliebige Diffgl. 2. O.

$$\mathfrak{y}'' + \mathfrak{a}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}') = 0 \tag{21}$$

der B. T. (6) unterwerfen. Es ist wegen $\mathfrak{y}'' = \dfrac{d\mathfrak{y}'}{d\mathfrak{x}}$

$$\mathfrak{y}'' = \frac{P_2 y'' + P_1}{X_2 y'' + X_1}. \tag{22}$$

Somit nimmt (21) die Form an:

$$y'' + \frac{P_1 + X_1 \mathfrak{a}}{P_2 + X_2 \mathfrak{a}} = y'' + \alpha(x, y, y') = 0. \tag{23}$$

Umgekehrt entspricht der Diffgl. (23) die Diffgl. in der $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene:

$$\mathfrak{y}'' + \frac{-P_1 + P_2 \alpha}{X_1 - X_2 \alpha} = \mathfrak{y}'' + \mathfrak{a}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}') = 0. \tag{24}$$

Wir sehen nun: Die Diffgl. (24) wird illusorisch für den Wert

$$\alpha = \frac{X_1}{X_2}, \tag{25}$$

denn dann nimmt die Größe $\mathfrak{a}$ die Form $\dfrac{\Delta}{0} = \infty$ an. Wir können jedoch der Diffgl.

$$\mathfrak{y}'' = \infty \tag{26}$$

einen Sinn geben, wenn wir uns erinnern, daß ja die Diffgl. (20), worin α den Wert (25) besitzt, die Kurven der Ebene (x, y) definiert, welche in die Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0, \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0$ übergehen. Wir werden also die Diffgl. (26) die *Diffgl. der Punkte* in der $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene nennen. Demnach ist vom Standpunkt der B. T.n aus die Diffgl. $y'' = \infty$ als vollkommen gleichberechtigt mit jeder andern gewöhnlichen Diffgl. 2. O. zu betrachten.

Die einzigen B. T.n, welche die Diffgl. $\mathfrak{y}'' = \infty$ invariant lassen, sind die erweiterten P. T.n, denn aus (23) folgt $X_2 = 0$ für $\mathfrak{a} = \infty$ und $\alpha = \infty$.

Die ∞^8 *dualistischen* Trf.n sind eigentliche B. T.n.

§ 2. Allgemeine Sätze über die G_8 von Berührungstransformationen, die zwei gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung invariant lassen.

1. Die achtgliedrige projektive Gruppe der Ebene ist als P. T.s-Gruppe durch die Forderung definiert. daß sie die Gesamtheit der Geraden invariant läßt, was damit gleichbedeutend ist, daß die Diffgl. $y'' = 0$ ungeändert bleibt. Aus dieser Bedingung erhalten wir auch die Definitionsgleichungen (Defgl.n) der projektiven G_8. Ist $Xf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$ die allgemeine projektive inf. Trf., so muß also $Xy'' = 0$ sein vermöge $y'' = 0$. Nun ist allgemein, wenn $Xy^{(i)} = \eta^{(i)}$ gesetzt wird,

$$\eta^{(i)} = \frac{d\eta^{(i-1)}}{dx} - \frac{d\xi}{dx}y^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{27}$$

Diese Rekursionsformel liefert:

$$\eta' = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2, \tag{28}$$

$$\eta'' = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y'' - 3\xi_y y'y''. \tag{29}$$

Nullsetzen des Ausdrucks (29) vermöge $y'' = 0$ ergibt als Defgl.n der projektiven G_8 die vier Gleichungen:

$$\eta_{xx} = 0, \quad 2\eta_{xy} = \xi_{xx}, \quad \eta_{yy} = 2\xi_{xy}, \quad \xi_{yy} = 0. \tag{30}$$

Sie lassen sich ohne weiteres integrieren, und man findet auch auf diesem Wege, daß sich die allgemeine projektive inf. Trf. linear zusammensetzt aus den acht inf. Trf.n

$$p, q; \quad xp + yq; \quad yp, xq, xp - yq; \quad x^2p + xyq, \quad xyp + y^2q. \tag{31}$$

$$\left(p = \frac{\partial f}{\partial x},\ q = \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Die Diffgl. $y'' = 0$ gestattet eine achtgliedrige Gruppe, nämlich die projektive. Wir fragen nun: Welche Diffgl.n 2. O.

$$y'' + \alpha(x, y, y') = 0 \tag{32}$$

gestatten eine G_8 von P. T.n? Zur Beantwortung der Frage setzen wir voraus, daß α nach Potenzen von y' entwickelbar ist; durch eine Transformation

$$\overline{x} = x, \ \overline{y} = y + ax$$

ist das jedenfalls immer zu erreichen. Es sei also

$$\alpha = -N - Ry' + Ly'^2 + My'^3 + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} A_\varkappa y'^{3+\varkappa}. \tag{33}$$

Soll Xf die Diffgl. (32) invariant lassen, so muß der Ausdruck $X(y'' + \alpha)$ verschwinden vermöge (32). Führt man diese Rechnung durch, so findet man (durch Nullsetzen der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von y') die Gleichungen

$$\text{(a)}\begin{cases} \eta_{xx} - 2N\xi_x - R\eta_x + N\eta_y - N_x\xi - N_y\eta = 0, \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} - R\xi_x - 3N\xi_y + 2L\eta_x - R_x\xi - R_y\eta = 0, \\ 2\xi_{xy} - \eta_{yy} + 2R\xi_y - 3M\eta_x - L\eta_y - L_x\xi - L_y\eta = 0, \\ \xi_{yy} + M\xi_x - L\xi_y - 4A_1\eta_x - 2M\eta_y - M_x\xi - M_y\eta = 0, \end{cases}$$

$$\text{(b)}\begin{cases} -2A_1\xi_x + 5A_2\eta_x + 3A_1\eta_y + A_{1x}\xi + A_{1y}\eta = 0, \\ -(2+k)A_{k+1}\xi_x - kA_k\xi_y + (5+k)A_{k+2}\eta_x \\ +(3+k)A_{k+1}\eta_y + A_{k+1,x}\xi + A_{k+1,y}\eta = 0, \\ (k = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{34}$$

Die vorstehenden Diffgl.n für ξ, η definieren auf alle Fälle eine Gruppe. Man überzeugt sich leicht davon, daß aus (34 a) alle Ableitungen 3. O. von ξ, η durch einmalige Differentiation als lineare homogene Funktionen der Ableitungen 2. und niedrigerer Ordnung

berechnet werden können. Vermöge (34 a) bleiben daher höchstens 8 Ableitungen willkürlich, nämlich

$$(34') \qquad \xi,\ \eta,\ \xi_x,\ \eta_x,\ \xi_y,\ \eta_y$$

und noch zwei der Auswahl überlassene Ableitungen 2. O. Daraus folgt: *Eine Diffgl. 2. O. gestattet höchstens eine achtgliedrige Gruppe von P. T.n.* Ist nun die Gruppe wirklich achtgliedrig, dann sind die Ableitungen (34′) willkürlich, und die Gleichungen (34 b) können nur bestehen, wenn *sämtliche* A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *verschwinden.* Die Diffgl. (32) lautet dann:

$$(35) \qquad y'' + My'^3 + Ly'^2 - Ry' - N = 0,$$

und die Gleichungen (34):

$$(36) \qquad \begin{aligned} &\eta_{xx} - 2N\xi_x - R\eta_x + N\eta_y - N_x\xi - N_y\eta = 0,\\ &2\eta_{xy} - \xi_{xx} - R\xi_x - 3N\xi_y + 2L\eta_x - R_x\xi - R_y\eta = 0,\\ &2\xi_{xy} - \eta_{yy} + 2R\xi_y - 3M\eta_x - L\eta_y - L_x\xi - L_y\eta = 0,\\ &\xi_{yy} + M\xi_x - L\xi_y - 2M\eta_y - M_x\xi - M_y\eta = 0. \end{aligned}$$

Diese Diffgl.n weisen eine gewisse Symmetrie auf: bei Ausübung der in Zyklen geschriebenen Substitution

$$(MN)\,(LR)\,(\xi\eta)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

vertauschen sich in (36) die erste und die vierte, die zweite und die dritte Gleichung. Das ist kein Zufall; statt y als von x abhängend zu betrachten, können wir ja auch x als Funktion von y ansehen und die Differentialquotienten $x^{(i)} = \dfrac{d^i x}{dy^i}$ bilden; es ist nun

$$x' = \frac{1}{y'}, \quad y' = \frac{1}{x'}; \quad x'' = -\frac{y''}{y'^3}, \quad y'' = -\frac{x''}{x'^3}.$$

Die Diffgl. (35) ist dann gleichwertig mit dieser:

$$x'' + Nx'^3 + Rx'^2 - Lx' - M = 0,$$

und die Forderung der Invarianz dieser Diffgl. muß wieder die Defgl.n (36) liefern.

Sollen nun die Diffgl.n (36) integrabel sein, so müssen gewisse Int. Bedgg.n für L, M, N, R befriedigt werden:

$$(37) \qquad \Phi_i(L, M, N, R, L_x, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Wir werden diese Relationen später auf anderem Wege finden. Vorläufig können wir nur sagen: Soll eine gewöhnliche Diffgl. 2. O. eine achtgliedrige Gruppe von P. T.n gestatten, dann muß sie die Form (35) mit den Relationen (37) besitzen. Man erkennt ferner ohne weiteres, daß eine G_8 von P. T.n höchstens *eine* gewöhnliche Diffgl. 2. O. invariant läßt.

Die Gruppe (36) ist *primitiv*, da sie keine gewöhnliche Diffgl. 1. O. invariant läßt. Die Forderung nämlich, daß Xf die Gleichung $y' - \varphi(x, y) = 0$ ungeändert lasse, führt auf

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\varphi - \xi_y\varphi^2 - \xi\varphi_x - \eta\varphi_y = 0,$$

und diese Beziehung ist für eine G_8 mit unabhängigen Ableitungen (34′) unmöglich. Daher *ist die G_8 (36) durch P. T. ähnlich mit der projektiven G_8* [5]).

Zusammenfassend erhalten wir

Satz 4. *Eine gewöhnliche Diffgl. 2. O. gestattet höchstens eine achtgliedrige Gruppe von P. T.n, und eine G_8 von P. T.n läßt höchstens eine gewöhnliche Diffgl. 2. O. invariant. In diesem Falle ist die G_8 durch P. T. mit der projektiven G_8 ähnlich, wobei die invariante*

[5]) Vgl. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Abschn. 3, Kap. 3, Theorem 5.

Diffgl. 2. O. in die Form $y'' = 0$ übergeht. Die Diffgl. (35) *mit den Relationen* (37) *ist die allgemeinste Diffgl. 2. O., welche durch P. T. die Form $y'' = 0$ erhalten kann, und das System* (36) *definiert die allgemeinste mit der projektiven G_8 durch P. T. ähnliche Gruppe.*

2. Als Gruppe von B. T.n ist die projektive G_8 definiert als die größte Gruppe, welche die *beiden* Diffgl.n 2. O.

$$y'' = 0, \quad y'' = \infty$$

invariant läßt. Die unendliche Gruppe von B. T.n, welche die Diffgl. 2. O.

$$y'' + \alpha(x, y, y') = 0 \tag{38}$$

invariant läßt, besitzt die Defgl.

$$(Xy'' + X\alpha)_{y''=-\alpha} = 0. \tag{38'}$$

Nun ist nach (27) und (15)

$$Xy'' = -U_{11} - (U_{12} + U_{21})\, y'' - U_{22} y''^2, \tag{39}$$

so daß (38′) lautet:

$$-U_{11} + \alpha(U_{12} + U_{21}) - \alpha^2 U_{22} + \alpha_1 U_2 - \alpha_2 U_1 - \alpha_3 U = 0. \tag{40}$$

Für $\alpha = \infty$ folgt aus (40) durch Division mit α^2:

$$U_{22} = 0, \tag{41}$$

d. h. die Defgl. der unendlichen Gruppe aller erweiterten P. T.n, die von inf. Trf.n erzeugt sind. Nach Satz 3 ist jede Gruppe (40) — durch B. T. — ähnlich mit der Gruppe (41).

Die Eigenschaft der projektiven G_8, die größte von beiden Diffgl.n $y'' = 0$, $y'' = \infty$ gestattete Gruppe von B. T.n zu sein, liefert nach (40)

$$U_{11} = 0, \quad U_{22} = 0 \tag{42}$$

als die Defgl.n dieser Gruppe. Wir denken uns nun auf die projektive G_8 der Variablen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ mit den Defgl.n

$$\mathfrak{K}_{\mathrm{II}} = 0, \quad \mathfrak{K}_{\mathrm{II\,II}} = 0 \tag{42'}$$

für die ch. Fu. $\mathfrak{K}$ die allgemeinste B. T. (6) ausgeübt. Die beiden Diffgl.n

$$\mathfrak{y}'' = 0, \quad \mathfrak{y}'' = \infty \tag{43}$$

gehen dabei über in

$$y'' + \alpha = 0, \quad y'' + \beta = 0, \tag{44}$$

wobei nach (23)

$$\alpha = \frac{P_1}{P_2}, \quad \beta = \frac{X_1}{X_2}. \tag{44'}$$

Die aus der projektiven G_8 hervorgehende allgemeine G_8 von B. T.n ist dann die größte Gruppe, welche die beiden Diffgl.n (44) ungeändert läßt; sie besitzt daher für ihre allgemeine ch. Fu. K die Defgl.n

$$\begin{aligned} &-K_{11} + \alpha(K_{12} + K_{21}) - \alpha^2 K_{22} + \alpha_1 K_2 - \alpha_2 K_1 - \alpha_3 K = 0 \\ &-K_{11} + \beta(K_{12} + K_{21}) - \beta^2 K_{22} + \beta_1 K_2 - \beta_2 K_1 - \beta_3 K = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Diese Gleichungen sind nichts anderes als die transformierten Gleichungen (42′), und sie müssen sich aus (42′) durch Umrechnung vermittels (12a) und (18) ergeben. Damit die allgemeinste Lösung von (45) gerade acht willkürliche Konstanten enthält, müssen gewisse Int. Bedgg.n erfüllt sein:

$$\Omega^{(i)}(\alpha, \beta, \alpha_1, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{46}$$

Wann gestatten nun zwei gewöhnliche Diffgl.n 2. O. eine G_8 von B. T.n? Wenn wir die Diffgl. $y'' + \beta = 0$ auf die Form $y'' = \infty$ bringen — was nach Satz 3 jederzeit möglich ist —, so erscheint das Problem auf das in Ziffer **1** dieses Paragraphen behandelte zurückgeführt, und wir können sofort den Satz 4 verallgemeinern zu dem

Satz 5. *Zwei gewöhnliche Diffgl.n 2. O. gestatten höchstens eine G_8 von B. T.n, und eine G_8 von B. T.n läßt höchstens zwei gewöhnliche Diffgl.n 2. O. invariant. In diesem Falle ist die G_8 mit der projektiven G_8 durch B. T. ähnlich, wobei die beiden invarianten Diffgl.n 2. O. in die Diffgl.n* (43) *übergehen. Das System* (45) *mit den Relationen* (46) *definiert die allgemeinste mit der projektiven G_8 ähnliche Gruppe von B. T.n, und* (44) *ist das allgemeinste Paar von Diffgl.n 2. O., das durch B. T. die Form* (43) *erhalten kann.*

Da das System (45) in bezug auf α, β symmetrisch ist, muß auch das System (46) der Int. Bedgg.n bei Vertauschung von α, β ungeändert bleiben. Die beiden Diffgl.n (44) sind daher vollkommen gleichberechtigt; wenn sie auf die Form $\mathfrak{y}'' = 0$, $\mathfrak{y}'' = \infty$ gebracht werden können, so gibt es auch B. T.n, welche sie in die Form $\mathfrak{y}'' = \infty$, $\mathfrak{y}'' = 0$ überführen.

3. Die beiden Diffgl.n (44) mögen eine G_8 gestatten und T, T' seien zwei B. T.n, welche ihnen die Form (43) geben. Dann ist

$$T' = T(T^{-1}\,T'),$$

und $T^{-1}\,T'$ muß die Diffgl.n (43) invariant lassen; d. h. aber, $T^{-1}\,T'$ ist eine der ∞^8 projektiven Trf.n: *Stehen die Diffgl.n* (44) *in der Beziehung* (46), *dann gibt es ∞^8 B. T.n, welche die erste in $\mathfrak{y}'' = 0$ und gleichzeitig die zweite in $\mathfrak{y}'' = \infty$ überführen.*

Ist nun (6) eine dieser B. T.n, dann folgen aus (44′) die beiden Bedingungen

$$P_1 = \alpha P_2, \quad X_1 = \beta X_2.$$

Durch diese Bedingungen zusammen mit (8) und (10) sind aber auch notwendigerweise alle ∞^8 B. T.n dieser Art bestimmt. Es folgt also: Durch

$$(47)\qquad \begin{array}{ll} \text{(a)} & Y_1 = PX_1, \quad Y_2 = PX_2 \\ \text{(b)} & P_1 = \alpha P_2, \quad X_1 = \beta X_2 \\ \text{(c)} & \begin{array}{l} X_2P_{11} + X_1P_{12} + 2P_1X_{21} = P_2X_{11} + P_1X_{12} + 2X_1P_{21} \\ X_1P_{22} + X_2P_{21} + 2P_2X_{12} = P_1X_{22} + P_2X_{21} + 2X_2P_{12} \end{array} \end{array}$$

zusammen mit (46) werden ∞^8 B. T.n bestimmt. Denken wir uns X, P gemäß (47 c) gewählt, dann gibt es ∞^1 Lösungen Y von (47 a). Demnach muß (47 b, c) ∞^7 Lösungspaare P, X zulassen, und mehr Lösungspaare kann es auch gar nicht geben. Wir können daher die Relationen (46) auch erhalten, indem wir (47 b, c) durch Differentiation auf eine Form bringen, die es gestattet, alle Ableitungen einer gewissen Stufe durch solche niedrigerer Stufe auszudrücken, und indem wir dann die Int. Bedgg.n aufstellen. Wieder erkennen wir, daß die Relationen (46) in α, β als Ganzes symmetrisch sind, denn das System (47 b, c) bleibt bei Vertauschung von α mit β, P mit X ungeändert. Ersetzt man in (47) die Gleichungen (b) durch

$$(47\,\text{b}')\qquad P_1 = \beta P_2, \quad X_1 = \alpha X_2,$$

so bestimmt das System (47 a, b′, c) die ∞^8 B. T.n, welche gleichzeitig $y'' + \alpha = 0$ in $\mathfrak{y}'' = \infty$ und $y'' + \beta = 0$ in $\mathfrak{y}'' = 0$ verwandeln. Die Int. Bedgg.n des Systems (47 b′, c) gehen aus (46) durch Vertauschung von α und β hervor, d. h. sie sind mit (46) gleichwertig.

Schreiben wir die Diffgl.n (44) in der Form

$$(48)\qquad \alpha' y'' + 1 = 0, \quad \beta' y'' + 1 = 0 \qquad \left(\alpha' = \frac{1}{\alpha}, \beta' = \frac{1}{\beta}\right),$$

und die Gleichungen (47 b) entsprechend:

$$(47\,\text{b}'')\qquad P_2 = \alpha' P_1, \quad X_2 = \beta' X_1,$$

so sind die Int. Bedgg.n des Systems (47 b″, c) die notwendigen und hinreichenden Relationen, welche zwischen α' und β' bestehen müssen, damit die Diffgl.n (48) die Form (43) erhalten können. Nun sind die Gleichungen (47 c) als Ganzes symmetrisch in bezug

auf die Indizes 1, 2, ebenso die Relationen zwischen den Operationen $f_{i_1 \cdots i_q}$ $(i_1, \ldots, i_q = 1, 2)$; daher gehen die Int. Bedgg.n des Systems (47 b'', c) aus (46) hervor, wenn die Indizes 1, 2 vertauscht und α', β' für α, β geschrieben werden:

Satz 6. *Das System der Relationen* (46) *bleibt ungeändert bei Vertauschung von* α, β; *setzt man in ihm* $\alpha = \frac{1}{\alpha'}$, $\beta = \frac{1}{\beta'}$, *so sind die hierdurch hervorgehenden Relationen zwischen* α', β' *gleichwertig mit denen, welche aus* (46) *entstehen, wenn die Indizes* 1, 2 *vertauscht und* α, β *durch* α', β' *ersetzt werden.*

Da die Diffgl.n $y'' = 0$, $y'' = \infty$ die Form $\mathfrak{y}'' = 0$, $\mathfrak{y}'' = \infty$ erhalten können, so gibt es nach dem Vorhergehenden ∞^8 B. T.n, welche $y'' = 0$ in $\mathfrak{y}'' = \infty$ und zugleich $y'' = \infty$ in $\mathfrak{y}'' = 0$ überführen; sie sind natürlich nichts anderes als die ∞^8 *Dualitäten* der Ebene. Für $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ erhalten wir aus (47 b):

$$P_1 = 0, \quad X_2 = 0, \tag{49}$$

während $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ liefert:

$$P_2 = 0, \quad X_1 = 0. \tag{49'}$$

Daher definiert (47 a, c) + (49) die ∞^8 projektiven, (47 a, c) + (49') die ∞^8 dualistischen Trf.n der Ebene. Die dualistischen Trf.n lassen offenbar die projektive G_8 invariant. Daraus ist zu schließen, daß es auch in bezug auf die allgemeinste mit der projektiven G_8 ähnliche G_8 von B.T.n ∞^8 B.T.n gibt, welche die G_8 invariant lassen, aber die Diffgl.n $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$, die die G_8 bestimmen, untereinander vertauschen. Wir wollen sie die *in bezug auf die* G_8 *dualistischen* Trf.n nennen.

Die direkte Ausrechnung der Int.Bedgg.n zu dem System (45) oder (47 b, c) ist praktisch sehr schwer durchführbar und würde zudem in höchst unübersichtlichen Formelgebilden endigen. Indessen ist es auf einem Umwege möglich, zu einer verhältnismäßig einfachen Darstellung der Relationen (46) zu gelangen, wobei zugleich eine Charakterisierung der wichtigsten Untergruppen der allgemeinen G_8 angebahnt wird. Dies soll im nächsten Paragraphen geschehen.

§ 3. Herleitung der Relationen zwischen α, β.

1. Die allgemeine projektive Gruppe (31) besitzt die zweigliedrige transitive und kommutative Untergruppe

$$p, q. \tag{50}$$

Die größte Untergruppe von (31), in der p, q invariant ist, ist die sechsgliedrige *affine* Gruppe:

$$p, q;\ xp + yq; \quad yp, xq, xp - yq. \tag{51}$$

Eine weitere zweigliedrige kommutative, aber intransitive Untergruppe von (31) ist

$$x^2 p + xyq, \quad xyp + y^2 q; \tag{52}$$

sie ist ebenfalls invariant in einer sechsgliedrigen:

$$xp - yq,\ yp, xq;\quad xp + yq;\quad x^2 p + xyq,\ xyp + y^2 q. \tag{53}$$

Die von (52) erzeugten endlichen Trf.n sind

$$\bar{x} = \frac{x}{1 + ax + by}, \quad \bar{y} = \frac{y}{1 + ax + by}.$$

Die Gruppen (50) und (52) sind *ähnlich* durch B.T.n, z. B. durch die von Lie benutzte *Dualität*

$$\mathfrak{x} = \frac{y'}{y - xy'}, \quad \mathfrak{y} = -\frac{1}{y - xy'}, \quad \mathfrak{y}' = -\frac{x}{y} \tag{54}$$

mit der Leitgleichung

$$x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + 1 = 0, \tag{54'}$$

welche die Gruppe $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ $\left(\mathfrak{p} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}, \mathfrak{q} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}\right)$ in die Gruppe (52) verwandelt (Bestätigung am einfachsten durch (9) u. (18)). Da die Dualität (54) zu sich selbst invers ist, verwandelt sie die Gruppe (52) wieder in die Gruppe $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$. Weil die Gruppen (50) und (52) durch eine Dualität ähnlich sind, nennen wir sie *zueinander dualistisch.*

Die Gruppe (52) ist vermöge der projektiven Trf.

$$\mathfrak{x} = \frac{x}{y}, \quad \mathfrak{y} = \frac{1}{y} \tag{$\overline{54}$}$$

ähnlich mit der Gruppe $\mathfrak{q}, \mathfrak{x}\mathfrak{q}$. Nach Lie-Engel [6]) sind alle zweigliedrigen kommutativen P.T.s-Gruppen der Ebene durch P.T. ähnlich entweder mit der transitiven Gruppe p, q oder mit der intransitiven q, xq. Wir wollen jetzt zeigen, daß alle zweigliedrigen *kommutativen* Gruppen von B.T.n untereinander und somit auch zu p, q ähnlich sind. Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst den

Satz 7. *Jede zweigliedrige Gruppe von B.T.n in der Ebene besitzt eine wesentliche Invariante erster Ordnung* $I(x, y, y')$.

Die zweigliedrige Gruppe möge erzeugt sein von Xf, Yf mit den ch. Fu.n U, V. Satz 7 ist richtig, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} U_2 & y'U_2 - U & -U_1 \\ V_2 & y'V_2 - V & -V_1 \end{pmatrix}$$

den Rang 2 besitzt. Angenommen, die zweireihigen Determinanten dieser Matrix verschwinden sämtlich. Dann ist

$$U_2V - V_2U = 0, \qquad U_1V - V_1U = 0;$$
$$\log U = \log V + \varphi(x, y), \qquad \log U = \log V + \psi(y', xy' - y);$$
$$\varphi(x, y) = \psi(y', xy' - y) = \text{const.}$$

und daher $U = \text{const.}\, V$. Das aber ist unmöglich.

Wir erweitern nun Xf, Yf zu $X''f$, $Y''f$ in bezug auf y''. Nach dem soeben Bewiesenen haben die Diffgl.n

$$X''f = 0, \qquad Y''f = 0$$

zwei unabhängige Lösungen, die wir in der Form $I(x, y, y')$, $\bar{I}(x, y, y', y'')$ annehmen dürfen, wobei $\bar{I}$ wirklich y'' enthält. Somit ist jede Diffgl. 2. O. $\bar{I}(x, y, y', y'') = \text{const.}$ invariant gegenüber der Gruppe Xf, Yf; diese Gruppe ist daher nach Satz 3 *reduzibel*, woraus ihre Ähnlichkeit mit p, q hervorgeht. Es gilt also

Satz 8. *Alle kommutativen G_2 von B.T.n der Ebene sind ähnlich mit p, q.*

2. Die B.T.s-Gruppen vom Typus p, q sollen für die Folge mit $\mathcal{G}_2$ bezeichnet werden. Die Defgl.n für die allgemeine ch. Fu. $\mathfrak{U} = a\mathfrak{y}' - b$ der Gruppe $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ sind

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,II}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{II\,I}} = 0; \tag{55}$$

aus ihnen lassen sich alle Ableitungen zweiter Stufe berechnen, so daß nur $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_{\mathrm{II}}$ willkürlich bleiben. Die Defgl.n der allgemeinen $\mathcal{G}_2$ gehen aus (55) vermöge (6) und (12, a) hervor, und zwar müssen wieder eine Gleichung erster Stufe und zwei Gleichungen zweiter Stufe herauskommen:

$$\text{(a)} \qquad U_1 = \alpha U_2 + \lambda U \tag{56}$$
$$\text{(b)} \qquad U_{22} = \gamma U_2 + \vartheta U, \quad U_{21} = \bar{\gamma} U_2 + \bar{\vartheta} U.$$

[6]) A. a. O. [5]), Abschn. 3, S. 57.

Damit durch (56) auch wirklich eine $\mathcal{G}_2$ definiert wird, müssen die Koeffizienten gewisse Relationen befriedigen:

$$\Gamma^{(i)}(\alpha, \lambda, \gamma, \vartheta, \overline{\gamma}, \overline{\vartheta}, \alpha_1, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{57}$$

Diese Relationen sind einmal die Int.Bedgg.n und zum andern die Bedingungen, welche sich aus der Forderung ergeben, daß $\{U^{(1)} U^{(2)}\} = 0$ sein muß, wenn $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ zwei Lösungen von (56) sind.

Für den Koeffizienten α in (56 a) findet man vermöge (6), (18), (12 a)

$$\alpha = \frac{P_1}{P_2}. \tag{58}$$

Vergleich von (58) mit (44′) zeigt: Die B.T. T mit den Gleichungen (6) führt die Gruppe (55) und die sie gestattende Diffgl. $\mathfrak{y}'' = 0$ über in die $\mathcal{G}_2$ mit den Defgl.n (56) und in die Diffgl. $y'' + \alpha = 0$, welche somit der Gruppe (56) gegenüber invariant ist. Wir bezeichnen die Diffgl. $y'' + \alpha = 0$ als die *ausgezeichnete* (*invariante*) Diffgl. der $\mathcal{G}_2$ (56). Üben wir nach der B.T. T noch die B.T. T' aus, so erhalten wir aus $y'' + \alpha = 0$ und (56 a) dieselben Gleichungen, die aus $\mathfrak{y}'' = 0$ und $\mathfrak{U}_\mathrm{I} = 0$ vermöge TT' hervorgehen; d. h. *die neue Diffgl. 2. O. ist wieder die ausgezeichnete Diffgl. der neuen* $\mathcal{G}_2$. Das bestätigt auch die Rechnung. Die B.T. (6) verwandelt nach (23) die Diffgl. $\mathfrak{y}'' + \mathfrak{a} = 0$ in

$$y'' + \alpha = 0, \quad \alpha = \frac{P_1 + X_1 \mathfrak{a}}{P_2 + X_2 \mathfrak{a}}. \tag{59}$$

Aus der Gleichung

$$\mathfrak{U}_\mathrm{I} = \mathfrak{a}\mathfrak{U}_\mathrm{II} + \mathfrak{l}\mathfrak{U} \tag{60}$$

wird nach (18) und (12, a):

$$\frac{1}{\Delta}(P_2(\Delta U)_1 - P_1(\Delta U)_2) = \frac{\mathfrak{a}}{\Delta}(-X_2(\Delta U)_1 + X_1(\Delta U)_2) + \mathfrak{l}\mathfrak{U},$$

$$(P_2 + X_2\mathfrak{a})\, U_1 - (P_1 + X_1\mathfrak{a})\, U_2 + {}_*U = 0, \tag{61}$$

$$U_1 = \alpha U_2 + \lambda U. \tag{61′}$$

Für $\alpha = \infty$ oder $P_2 + X_2\mathfrak{a} = 0$ liefert (61):

$$U_2 = \mu U; \tag{62}$$

im Falle $\alpha = \infty$ ist die neue $\mathcal{G}_2$ natürlich P.T.s-Gruppe, und (62) besagt dann, daß sie *intransitiv* ist. Denn aus (62) folgt:

$$\eta = \left(y' - \frac{1}{\mu}\right)\xi = \tau(x, y)\,\xi. \tag{62′}$$

Umgekehrt folgt aus (62′) eine Relation (62).

Für die Gruppen $\mathcal{G}_2$ mit der ausgezeichneten Diffgl. $y'' + \alpha = 0$ wollen wir $\mathcal{G}_2(\alpha)$ schreiben.

3. Wir nehmen nun an, die Diffgl. 2. O.

$$y'' + \beta = 0, \quad \beta - \alpha \neq 0 \tag{63}$$

gestatte die $\mathcal{G}_2(\alpha)$ (56). Dazu sind gewisse Relationen erforderlich:

$$\Theta^{(i)}(\alpha, \beta, \lambda, \ldots, \overline{\vartheta}, \alpha_1, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{64}$$

Eine durch (56) und (64) definierte $\mathcal{G}_2$ wollen wir mit $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$ $(\neq \mathcal{G}_2(\beta, \alpha))$ bezeichnen.

Wir transformieren (63) in $\mathfrak{y}'' = \infty$, wodurch $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$ in eine P. T.s-Gruppe $\mathcal{G}_2(\mathfrak{a}, \infty)$ übergeht. $\mathcal{G}_2(\mathfrak{a}, \infty)$ ist transitiv, denn wegen $\alpha \neq \beta$ ist $\mathfrak{a} \neq \infty$. *Nun kann* $\mathcal{G}_2(\mathfrak{a}, \infty)$ *durch P.T. die Form* $\mathcal{G}_2(0, \infty)$ *erhalten, z. B. die Form* (55). Daher haben wir im ganzen $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$ in eine $\mathcal{G}_2(0, \infty)$ transformiert und $y'' + \alpha = 0$ in $\mathfrak{y}'' = 0$, $y'' + \beta = 0$ in $\mathfrak{y}'' = \infty$. Es gilt somit

Satz 9. *Gestatten zwei Diffgl.n* $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ *eine* $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$, *so können sie durch B.T. die Form* $\mathfrak{y}'' = 0$, $\mathfrak{y}'' = \infty$ *erhalten.*

Darin liegt: Die Relationen (46) sind eine Folge der Relationen (57) und (64).

Die durch (45) und (46) definierte G_8 bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta) = \mathcal{G}_8(\beta, \alpha)$. Wegen Satz 9 ist jede $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$ Untergruppe der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$.

In $\mathcal{G}_8(0, \infty)$ — der projektiven G_8 — gibt es ∞^2 *gleichberechtigte* Untergruppen zu $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ — die nach den Ausführungen auf S. 136 wieder die Gestalt $\mathcal{G}_2(0, \infty)$ besitzen —, da $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ in der affinen G_6 invariant ist. Andererseits sind alle $\mathcal{G}_2(0, \infty)$ in $\mathcal{G}_8(0, \infty)$ gleichberechtigt, denn sie sind durch P.T. ähnlich, und diese P.T.n sind projektiv, weil sie die ausgezeichnete Diffgl. $\mathfrak{y}'' = 0$ invariant lassen. Die allgemeine $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ enthält somit ebenfalls ∞^2 gleichberechtigte Untergruppen $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$, und alle $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$ sind in $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ gleichberechtigt. Dieses Resultat können wir aussprechen in dem

Satz 10. *Bestehen zwischen* α, β *die Relationen* (46), *dann bestimmen die Gleichungen* (57) *und* (64) ∞^2 *Größensysteme* $\lambda, \gamma, \vartheta, \bar{\gamma}, \bar{\vartheta}$ *und damit die* ∞^2 *gleichberechtigten Untergruppen* $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$ *der* $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$.

Auf Grund der bisher entwickelten Ergebnisse wird uns die Berechnung der Relationen (46) möglich sein, und zwar in vier Schritten.

4. Wir berechnen zuerst die Relationen (37). Jede $\mathcal{G}_2(\alpha, \infty)$ ist transitiv; daher sind in ihren Defgl.n ξ und η durch keine Relation verbunden, also unabhängig. Diese Defgl.n lauten daher:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \mu_1 \xi + \nu_1 \eta, \qquad \eta_y = \varrho_1 \eta + \sigma_1 \xi, \\ \xi_y &= \mu_2 \xi + \nu_2 \eta, \qquad \eta_x = \varrho_2 \eta + \sigma_2 \xi. \end{aligned} \tag{65}$$

(65) definiert die allgemeinste $\mathcal{G}_2(\alpha, \infty)$, welche durch P. T. mit p, q ähnlich ist (α setzt sich aus den Koeffizienten von (65) zusammen und wird nachher berechnet werden). Dabei geht $y'' + \alpha = 0$ in $y'' = 0$ über, d. h. die Relationen (37) müssen eine Folge der Relationen sein, die zwischen den Koeffizienten von (65) bestehen. Damit die durch (65) definierte Gruppe kommutativ ist, muß, wenn ξ_1, η_1; ξ_2, η_2 zwei beliebige Lösungssysteme von (65) bedeuten, gelten:

$$\begin{aligned} \xi_1 \xi_{2x} + \eta_1 \xi_{2y} - (\xi_2 \xi_{1x} + \eta_2 \xi_{1y}) &= \xi_1 \xi_{2x} - \xi_2 \xi_{1x} + \eta_1 \xi_{2y} - \eta_2 \xi_{1y} = 0, \\ \xi_1 \eta_{2x} + \eta_1 \eta_{2y} - (\xi_2 \eta_{1x} + \eta_2 \eta_{1y}) &= \xi_1 \eta_{2x} - \xi_2 \eta_{1x} + \eta_1 \eta_{2y} - \eta_2 \eta_{1y} = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt vermöge (65)

$$\begin{aligned} (\mu_2 - \nu_1)(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) = 0, \qquad (\varrho_2 - \sigma_1)(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) = 0, \\ \mu_2 = \nu_1, \qquad \varrho_2 = \sigma_1. \end{aligned} \tag{65'}$$

Vermöge (65′) vereinfachen wir (65), wobei wir für ν_2, σ_2 einfach ν, σ schreiben:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \mu_1 \xi + \mu_2 \eta, \qquad \eta_y = \varrho_1 \eta + \varrho_2 \xi, \\ \xi_y &= \mu_2 \xi + \nu \eta, \qquad \eta_x = \varrho_2 \eta + \sigma \xi. \end{aligned} \tag{66}$$

Jetzt sind die Int.Bedgg.n für (66) aufzustellen. Die Bedingung $\xi_{xy} = \xi_{yx}$ liefert

$$\begin{aligned} \mu_{1y} - \mu_{2x} &= \nu\sigma - \mu_2 \varrho_2, \\ \nu_x - \mu_{2y} &= \mu_2(\varrho_1 - \mu_2) + \nu(\mu_1 - \varrho_2). \end{aligned} \tag{67}$$

Durch Vertauschung von μ_1, μ_2, ν mit $\varrho_1, \varrho_2, \sigma$ sowie der Operationen $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ ergibt sich aus (67) das zweite Paar von Int.Bedgg.n:

$$\begin{aligned} \varrho_{1x} - \varrho_{2y} &= \sigma\nu - \varrho_2 \mu_2, \\ \sigma_y - \varrho_{2x} &= \varrho_2(\mu_1 - \varrho_2) + \sigma(\varrho_1 - \mu_2). \end{aligned} \tag{67'}$$

Durch (66), (67), (67′) sind die mit p, q durch P.T. ähnlichen Gruppen charakterisiert.

Aus (13) und (15) ergibt sich vermöge (66) $U_1 = \alpha U_2 + *U$, wo.

$$(68) \qquad \alpha = \nu y'^3 + (2\mu_2 - \varrho_1)\, y'^2 + (\mu_1 - 2\varrho_2)\, y' - \sigma,$$

und $y'' + \alpha = 0$ ist die ausgezeichnete Diffgl. der Gruppe (66). Vergleich mit (35) liefert:

$$(69) \qquad \nu = M,\ \sigma = N;\quad \varrho_1 = 2\mu_2 - L,\ \mu_1 = 2\varrho_2 - R.$$

Aus (69), (67), (67′) müssen sich jetzt die Relationen (37) ableiten lassen. Einsetzen der Werte von (69) in (67) liefert zwei Relationen zwischen $\mu_2, \varrho_2, L, M, N, R$; aus ihnen bekommen wir durch die Substitution

$$(70) \qquad (MN)\,(LR)\,(\mu_2\varrho_2)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

die beiden aus (67′) vermöge (69) hervorgehenden Beziehungen. Insgesamt kommen wir so nach einer leichten Umformung auf die Gleichungen

$$(71) \qquad \begin{aligned} &(a) && \mu_{2x} = -\mu_2\varrho_2 + \tfrac{2}{3}L_x + \tfrac{1}{3}R_y + MN, \\ &\qquad && \mu_{2y} = -\mu_2^2 + L\mu_2 - M\varrho_2 + M_x + MR, \\ &(b) && \varrho_{2y} = -\mu_2\varrho_2 + \tfrac{2}{3}R_y + \tfrac{1}{3}L_x + MN, \\ &\qquad && \varrho_{2x} = -\varrho_2^2 + R\varrho_2 - N\mu_2 + N_y + NL. \end{aligned}$$

(71 b) wird aus (71 a) durch die Substitution (70) gewonnen. Nun muß $\mu_{2xy} = \mu_{2yx}$ sein; rechnen wir beide Ableitungen vermöge (71) aus und setzen sie einander gleich, so zeigt die Rechnung, daß die Größen μ_2, ϱ_2 ganz herausfallen und nur eine Beziehung zwischen L, M, N, R allein übrig bleibt. Die Gleichsetzung $\varrho_{2xy} = \varrho_{2yx}$ liefert eine zweite derartige Relation, die natürlich aus der ersten durch die Substitution $(MN)(LR)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)$ gewonnen wird. Die genannten Relationen lauten:

$$(72) \qquad \begin{aligned} &(a)\ 2L_{xy} - 3M_{xx} + R_{yy} - 2LL_x - LR_y + 3NM_y + 6MN_y - 3RM_x - 3MR_x = 0 \\ &(b)\ 2R_{xy} - 3N_{yy} + L_{xx} - 2RR_y - RL_x + 3MN_x + 6NM_x - 3LN_y - 3NL_y = 0. \end{aligned}$$

Die Diffgl.n (71) für μ_2, ϱ_2 sind vermöge (72) integrabel und ihr allgemeinstes Lösungspaar enthält zwei Konstanten. Daher bestimmt die Diffgl. (35) vermöge (71) und (69) ∞^2 $\mathcal{G}_2\,(\alpha, \infty)$, die durch (66) definiert werden. Also sind nach Satz 9 *die Relationen* (72) *die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Diffgl.* (35) *durch P. T. die Form* $\mathfrak{y}'' = 0$ *erhalten kann.* Zugleich sind (72) die Int. Bedgg.n (37) der Defgl.n (36) der allgemeinen $\mathcal{G}_8\,(\alpha, \infty)$, wobei α den Ausdruck in (35) bedeutet.

Die Relationen (72) wurden auf anderem Wege zuerst von Herrn A. G. Hall [7]) aufgestellt.

5. Für eine $\mathcal{G}_2(\alpha, \infty)$ nehmen die Defgl.n (56) die Form

$$(73) \qquad U_1 = \alpha U_2 + \lambda U;\quad U_{22} = 0,\quad U_{21} = \bar{\gamma} U_2 + \bar{\vartheta} U$$

an (s. Formel (41)). Die Bedingungen (64) sind hier von selbst erfüllt; daher müssen sich nach Satz 9 aus (57) für α die — aus (46) durch den Grenzübergang $\beta \to \infty$ hervorgehenden — Relationen ergeben, welche aussagen, daß $y'' + \alpha = 0$ durch P. T. die Form $\mathfrak{y}'' = 0$ bekommen kann.

Es ist zweckmäßig, eine neue Operation zu verwenden[8]):

$$(74) \qquad \partial_\alpha f = f_\alpha = f_1 - \alpha f_2 = \left(\frac{df}{dx}\right)_{y''=-\alpha}.$$

---

[7]) A. G. Hall, Bestimmung der Defgl.n aller endlichen kontin. Gruppen von P. T.n der Ebene, Dissertation Leipzig (1902).

[8]) Vgl. Gąsiorowski, a. a. O. [2]).

Wir merken gleich die Beziehung an (vgl. (3), (4)):

$$f_{3\alpha} - f_{\alpha 3} = \alpha_3 f_2. \tag{74'}$$

Die Forderung $\{U^{(1)}U^{(2)}\} = 0$ liefert nach (17) vermöge (73):

$$0 = (2\lambda + \alpha_2 - \overline{\gamma})\,(U_2^{(1)}U^{(2)} - U_2^{(2)}U^{(1)}),$$

$$\overline{\gamma} = 2\lambda + \alpha_2. \tag{75}$$

An Stelle von (73) tritt also das System

$$U_\alpha = \lambda U, \quad U_{22} = 0, \quad U_{21} = (2\lambda + \alpha_2)\,U_2 + \vartheta U, \tag{76}$$

für welches noch die Int. Bedgg.n aufzustellen sind, wobei die Koeffizienten der unabhängigen Ableitungen U_2, U verglichen werden müssen.

Nullsetzen des Koeffizienten von U_2 in der Bedingung $U_{122} + U_{221} - 2U_{212} = 0$ liefert

$$\overline{\vartheta} = -\lambda_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_{22}. \tag{77}$$

Nullsetzen der Koeffizienten von U_2 und U in der Bedingung $U_{3\alpha} - U_{\alpha 3} - \alpha_3 U_2 = 0$ ergibt

$$\lambda_\alpha = -\lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_3 \quad (\lambda_1 = \alpha\lambda_2 - \lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_3), \tag{78}$$

$$4\lambda_{2\alpha} - 2\lambda_3 + 2\lambda\lambda_2 + \alpha_{22}\lambda + \alpha_{22\alpha} = 0 \tag{78'}$$

Nun wird vermöge (78)

$$\lambda_3 = \lambda_{12} - \lambda_{21} = -\lambda_{2\alpha} - 2\lambda\lambda_2 - \alpha_{22}\lambda - \alpha_{32}; \tag{79}$$

daraus folgt an Stelle von (78')

$$\lambda_{2\alpha} = -\lambda\lambda_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_{22}\lambda - \tfrac{1}{3}\alpha_{32} - \tfrac{1}{6}\alpha_{22\alpha}. \tag{80}$$

Zum Schluß folgt aus dem Verschwinden des Koeffizienten von U_2 in $U_{223} - U_{322} = 0$:

$$\lambda_{22} = -\tfrac{1}{3}\alpha_{222}. \tag{81}$$

Wir haben jetzt die Koeffizienten des Systems (73) ausgedrückt durch α und λ; zwischen λ und α bestehen die Relationen (78), (79), (80) und (81); das sind Diffgl.n für λ, die λ_1 und alle Ableitungen zweiter Stufe von λ durch λ_2 und λ ausdrücken. Wegen Satz 10 müssen daher diese Diffgl.n vermöge der gesuchten Relationen für α integrabel sein. Es liegt deshalb nahe, zu versuchen, diese Relationen durch Aufstellen der Int. Bedgg.n für die genannten Diffgl.n zu gewinnen. Wenn wir (79) vermöge (80) umformen, haben wir also das System

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha &= -\lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_3,\\
\lambda_{2\alpha} &= -\lambda\lambda_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_{22}\lambda - \tfrac{1}{3}\alpha_{32} - \tfrac{1}{6}\alpha_{22\alpha},\\
\lambda_3 &= -\lambda\lambda_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_{22}\lambda - \tfrac{2}{3}\alpha_{32} + \tfrac{1}{6}\alpha_{22\alpha},\\
\lambda_{22} &= -\tfrac{1}{3}\alpha_{222}
\end{aligned} \tag{82}$$

zu behandeln. Durch Nullsetzen des von λ_2 und λ freien Gliedes in der Bedingung $\lambda_{3\alpha} - \lambda_{\alpha 3} - \alpha_3\lambda_2 = 0$ und des Koeffizienten von λ^1 in $\lambda_{223} - \lambda_{322} = 0$ bekommen wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad 6\alpha_{33} - 4\alpha_{23\alpha} + \alpha_{22\alpha\alpha} - 4\alpha_2\alpha_{23} + \alpha_2\alpha_{22\alpha} + 3\alpha_{22}\alpha_3 = 0,\\
&\text{(b)} \quad \alpha_{2222} = 0.
\end{aligned} \tag{83}$$

(83 b) sagt aus, daß α die Form besitzt:

$$\alpha = My'^3 + Ly'^2 - Ry' - N. \tag{84}$$

Gehen wir mit diesem Wert in (83 a) hinein, so müssen die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von y' verschwinden; durch Berechnung der Koeffizienten von y'^1 und y'^0 erhalten wir nun die beiden Gleichungen (72), d. h.: *Die Relationen* (83) *sind notwendig und hinreichend, damit* $y'' + \alpha = 0$ *durch P. T. die Form* $y'' = 0$ *erhalten kann*; sie stellen außerdem die Int. Bedgg.n des Systems (82) dar.

6. Nach dem Muster der Behandlung des Systems (73) behandeln wir jetzt das allgemeine System (56). Die Forderung $\{U^{(1)}\, U^{(2)}\} = 0$ liefert:

$$\bar{\gamma} = \alpha\gamma + 2\lambda + \alpha_2. \tag{85}$$

Sodann folgt für $\bar{\vartheta}$ aus $U_{122} + U_{221} = 2U_{212}$ durch Vergleichen der Koeffizienten von U_2:

$$\bar{\vartheta} = \alpha\vartheta - \bar{\vartheta} = -\tfrac{1}{2}\gamma_\alpha + \tfrac{1}{2}\lambda\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha_2\gamma + \lambda_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_{22}. \tag{86}$$

Aus $U_{3\alpha} - U_{\alpha 3} = \alpha_3 U_2$ folgen die beiden Relationen

$$\lambda_\alpha = -\lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_3, \tag{87}$$

$$\bar{\vartheta}_\alpha + \lambda_{2\alpha} + \lambda\bar{\vartheta} - \lambda_3 = 0. \tag{88}$$

(88) läßt sich mit Hilfe von (86) und (87) umformen zu

$$4\lambda_{2\alpha} - 2\lambda_3 + 2\lambda\lambda_2 - \gamma_{\alpha\alpha} + (\alpha_2\gamma)_\alpha + \alpha_{22}\lambda + \alpha_{22\alpha} - \alpha_3\gamma = 0. \tag{89}$$

Nullsetzen des Koeffizienten von U_2 in $U_{322} - U_{223} = 0$ gibt

$$3\lambda_{22} - \gamma_3 - \gamma_{\alpha 2} + (\alpha_2\gamma)_2 + \alpha_{222} = 0. \tag{90}$$

Die Relationen (85) bis (90) sind ein Teil der Relationen (57), die wir nicht vollständig berechnen, da sie in diesem Zusammenhange kein Interesse bieten.

Nunmehr sind die Gleichungen (64) zu bestimmen. Vermöge (56) (s. Formel (40)) muß sein:

$$-U_{11} + \beta(U_{12} + U_{21}) - \beta^2 U_{22} + \beta_1 U_2 - \beta_2 U_1 - \beta_3 U = 0. \tag{$\overline{90}$}$$

Daraus ergeben sich, wenn wir zur Abkürzung

$$\omega = \beta - \alpha \neq 0, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\beta - \alpha} \tag{91}$$

einführen, die beiden Relationen

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{3}{\omega}\,\lambda + \dfrac{\omega_1}{\omega^2} - \dfrac{\alpha\omega_2}{\omega^2} + \dfrac{2\,\alpha_2}{\omega}, \\ \vartheta = \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma_\alpha}{\omega} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda\gamma}{\omega} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha_2\gamma}{\omega} - \dfrac{\omega_2}{\omega^2}\,\lambda - \dfrac{\omega_3}{\omega^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha_{22}}{\omega} \end{cases} \tag{92}$$

oder

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \gamma = 3\,\bar{\omega}\lambda - \bar{\omega}_\alpha + 2\,\bar{\omega}\alpha_2 = 3\,\bar{\omega}\lambda - \bar{\alpha}, \\ &\text{(b)} \quad \bar{\alpha} = \bar{\omega}_\alpha - 2\,\bar{\omega}\alpha_2, \\ &\text{(c)} \quad \vartheta = \tfrac{1}{2}\,\bar{\omega}(\gamma_\alpha - \lambda\gamma - \alpha_2\gamma) + \bar{\omega}_2\lambda + \bar{\omega}_3 - \tfrac{1}{2}\,\bar{\omega}\alpha_{22}. \end{aligned} \tag{93}$$

Durch (85), (86) und (93) sind alle Koeffizienten der Defgl.n (56) ausgedrückt durch α, β, λ. Wenn wir mit (93 a) in (89) und (90) hineingehen, erhalten wir zwischen α, λ — (87) mit einbegriffen — nach einigen Rechnungen insgesamt die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \lambda_\alpha = -\lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_3 \quad (\lambda_1 = \alpha\lambda_2 - \lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_3), \\ &\text{(b)} \quad \lambda_3 = -\lambda\lambda_2 - \bar{\omega}\lambda^3 + \bar{\alpha}\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\Lambda\lambda + \tfrac{1}{6}\mathsf{M}, \\ &\text{(c)} \quad \lambda_{2\alpha} = -\lambda\lambda_2 + \bar{\omega}\lambda^3 - \bar{\alpha}\lambda^2 + (\tfrac{1}{2}\Lambda - \alpha_{22})\,\lambda - \tfrac{1}{6}\mathsf{M} - \alpha_{32}, \\ &\text{(d)} \quad \lambda_{22} = -3\bar{\omega}\lambda\lambda_2 + \bar{\alpha}\lambda_2 - \bar{\omega}^2\lambda^3 + (\bar{\omega}\bar{\alpha} - \bar{\omega}_2)\,\lambda^2 \\ &\qquad\qquad + (\bar{\omega}_3 + \bar{\alpha}_2 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}\Lambda)\,\lambda - \tfrac{1}{3}\mathsf{N} + \tfrac{1}{6}\bar{\omega}\mathsf{M}. \end{aligned} \tag{94}$$

Hierbei bedeutet

$$\begin{aligned} &\Lambda = \bar{\alpha}_\alpha + \bar{\alpha} + \alpha_{22}, \quad \bar{\alpha} = 3\,\bar{\omega}\alpha_3 - \alpha_2\bar{\alpha}, \\ &\mathsf{M} = \bar{\alpha}_{\alpha\alpha} + \bar{\alpha}_\alpha - 4\alpha_{32} + \alpha_{22\alpha} + 4\bar{\alpha}\alpha_3, \\ &\mathsf{N} = \bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_{\alpha 2} + \bar{\alpha}_2 + \alpha_{222}. \end{aligned} \tag{95}$$

Der Gang der Rechnung möge kurz angedeutet werden. Zuerst berechnen wir aus (89) und (93 a) mit Hilfe von (94 a) und der auch hier gültigen Formel (79) die Relation

(94 b); dann leite man aus (94 b) und (79) die Gleichung (94 c) her und aus (90), (93 a) und (94 a, b) die Gleichung (94 d). (94 b) und (94 c) sind hiernach vermöge (94 a) äquivalent.

Nach (94) sind λ_1 sowie alle Ableitungen zweiter Stufe von λ durch λ, λ_2 und α, β ausgedrückt. Analog wie zu (82) stellen wir auch für (94) zwei Int. Bedgg.n auf, und zwar wieder, indem wir in $\lambda_{3\alpha} - \lambda_{\alpha 3} - \alpha_3\lambda_2 = 0$ den Koeffizienten von λ^0 und in $\lambda_{322} - \lambda_{223} = 0$ den Koeffizienten von λ^1 gleich Null setzen. Eine einfache Rechnung liefert

$$(96)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \mathsf{M}_\alpha + 6\alpha_{33} + \alpha_2\mathsf{M} + 3\alpha_3\Lambda = 0,\\ &\text{(b)}\quad 2\mathsf{N}_2 + 2\bar\omega\mathsf{M}_2 - 3\Lambda_{22} - 6\bar\omega_{33} - 6\bar\alpha_{23} + 3(\bar\omega\Lambda)_3 + \bar\alpha(3\Lambda_2 - 4\mathsf{N}) + \bar\omega_2\mathsf{M} = 0. \end{aligned}$$

Nach Satz 10 müssen die Diffgl.n (94) integrabel sein und ∞^2 Lösungen λ zulassen, wenn α, β in der Beziehung (46) stehen. Die Relationen (96) sind also ein *Teil* der Relationen (46). Aber wir können beweisen, daß wir mit (96) bereits *alle* Relationen (46) in Besitz haben.

7. Mit (96) können wir ohne weiteres den Grenzübergang $\beta \to \infty$, d. h. $\bar\omega \to 0$ vollziehen, wodurch wir, wie es sein muß, wieder zu (83) zurückgelangen. Wir setzen nun in (96) $\beta = \dfrac{1}{\beta'}$, also $\bar\omega = \dfrac{\beta'}{1 - \alpha\beta'}$, so daß wir zwei rationale Gleichungen zwischen α, β' und deren Derivierten bekommen, die wir so schreiben:

$$(97)\qquad \bar\Omega^{(i)}(\alpha, \beta', \alpha_1, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Für $\beta' = 0$ kommt wieder (83), und es ist

$$(97')\qquad (\bar\Omega^{(i)})_{\beta'=\beta_1'=\cdots=0} = (-1)^{i-1}\,\omega^{(i)}(\alpha, \alpha_1, \ldots) \qquad (i = 1, 2),$$

wenn wir die Relationen (83) abkürzend schreiben

$$(98)\qquad \omega^{(i)}(\alpha, \alpha_1, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Die Gleichungen (83) lassen sich auflösen nach α_{2222} und z. B. α_{1212}.

Die Gleichung (83 a) lautet nämlich ausgerechnet:

$$(99)\quad \underline{6\alpha_{33} - 4\alpha_{231} + \alpha_{2211}} + 3\alpha\alpha_{223} - 2\alpha\alpha_{2221} - \alpha_1\alpha_{222} + \alpha_2\alpha_{221} - 4\alpha_2\alpha_{23} + 3\alpha_{22}\alpha_3 = 0;$$

die unterstrichenen Ableitungen 4. Stufe enthalten, in explizite Form gebracht, die Indizes 1, 2 je zweimal. Zwischen den Operationen $f_{i_1 i_2 i_3 i_4}(i_1, \ldots, i_4 = 1, 2)$, welche die Indizes 1, 2 je zweimal enthalten, lassen sich aus (5) vier Relationen herleiten, von denen aber nur

$$(99')\qquad f_{1122} + f_{2112} = 2f_{1212}, \quad f_{2211} + f_{1221} = 2f_{2121}, \quad f_{1221} = f_{2112}$$

unabhängig sind. Die unterstrichenen Glieder in (99) lassen sich vermöge (99′) so zusammenfassen:

$$(100)\qquad 6\alpha_{1212} + 12\alpha_{2121} - 17\alpha_{1221},$$

wenn z. B. die Operationen $f_{1212}, f_{2121}, f_{1221}$ in (99′) als unabhängige gewählt werden.

Sei nun $\mathfrak{y}'' + \mathfrak{a} = 0$ eine Diffgl., welche durch P. T. die Form $\mathfrak{y}'' = 0$ erhalten kann, also

$$(101)\qquad \omega^{(i)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_I, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Die B. T. (6) verwandelt die Diffgl.n

$$(102)\qquad \mathfrak{y}'' + \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{y}'' = \infty$$

in

$$(103)\qquad \mathfrak{y}'' + \alpha = 0, \quad \beta' y'' + 1 = 0, \quad \beta' = \frac{1}{\beta},$$

$$(103')\qquad \alpha = \frac{P_1 + X_1\mathfrak{a}}{P_2 + X_2\mathfrak{a}}, \quad \beta' = \frac{X_2}{X_1}.$$

Zwischen α, β' bestehen dann die Relationen (97). In die $\overline{\Omega}^{(i)}$ setzen wir nun die Werte (103′) ein; die Operationen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_{11}, \ldots$ drücken wir an Hand der Formeln (11 a) durch die Operationen $\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{a}_{\mathrm{II}}, \mathfrak{a}_{\mathrm{I\,I}}, \ldots$ aus. Dadurch erhalten wir zwei Funktionen

$$\Psi^{(i)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}, \ldots; X_1, \ldots, P_2, X_{11}, \ldots) = \overline{\Omega}^{(i)} \qquad (i = 1, 2). \tag{104}$$

Für genügend kleinen Betrag $|\mathfrak{a}|$ sind alle $\Psi^{(i)}$ in der „Umgebung" des Wertsystems der identischen Trf.:

$$X_1 = P_2 = 1, \quad X_2 = P_1 = X_{11} = \cdots = 0 \tag{105}$$

reguläre Funktionen ihrer Argumente. Wegen (97′) haben wir ferner

$$(\Psi^{(i)})_{\substack{X_1 = P_2 = 1 \\ X_2 = P_1 = X_{11} = \cdots = 0}} = (-1)^{i-1}\, \omega^{(i)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots) \qquad (i = 1, 2). \tag{106}$$

Die Gleichungen (101) mögen nach $\mathfrak{a}_{\mathrm{II\,II\,II}}$ und $\mathfrak{a}_{\mathrm{I\,II\,II}}$ aufgelöst lauten:

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{I\,II\,II}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}, \ldots), \quad \mathfrak{a}_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0. \tag{107}$$

Infolgedessen sind wegen (106) auch die Gleichungen

$$\Psi^{(i)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}, \ldots; X_1, \ldots, P_2, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{108}$$

in der Umgebung des Wertsystems (105) nach $\mathfrak{a}_{\mathrm{I\,II\,II}}$ und $\mathfrak{a}_{\mathrm{II\,II\,II}}$ auflösbar:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{\mathrm{I\,II\,II}} &= \mathfrak{F}^{(1)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}, \ldots, X_1, \ldots) \\ \mathfrak{a}_{\mathrm{II\,II\,II}} &= \mathfrak{F}^{(2)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}, \ldots, X_1, \ldots); \end{aligned} \tag{109}$$

dabei sind die in $\mathfrak{f}, \mathfrak{F}^{(1)}$ und $\mathfrak{F}^{(2)}$ auftretenden Operationen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}, \ldots$ als unabhängig zu denken.

Nun ist es klar, daß die Gleichungen (108) eine Folge der Gleichungen (101) und der Beziehungen (10) zwischen den Derivierten von X, P sein müssen. Daher muß auch (109) eine Folge von (107) und (10) sein, d. h. es muß

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{(1)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}, \ldots, X_1, \ldots) &\equiv \mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}, \ldots) \\ \mathfrak{F}^{(2)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}, \ldots, X_1, \ldots) &\equiv 0 \end{aligned} \tag{110}$$

sein vermöge (10) und der aus (10) durch Differentiation hervorgehenden Beziehungen.

Damit ist bewiesen: *Die Relationen* (108) *und* (101) *sind vermöge* (10) *äquivalent.* Nun sind wir beinahe am Ziel. Denn wir brauchen nur den bisherigen Gedankengang umzukehren und vorauszusetzen, daß die beiden gegebenen Diffgl.n (103) in der Beziehung (97) stehen. Nach Satz 3 gibt es B. T.n (6), welche die Diffgl.n (103) in (102) transformieren. Setzen wir für α, β' die Werte (103′) in (97) ein, so erhalten wir nach dem soeben ausgesprochenen Satze die Relationen (101), d. h. *wir können die Relationen* (97) *immer in die Form* (101) *transformieren.* Wegen (101) kann aber $\mathfrak{y}'' + \mathfrak{a} = 0$ durch P. T. in $\mathfrak{y}'' = 0$ übergehen. Wir gelangen also zu dem

Theorem 1. *Die beiden Relationen* (96) *sind notwendig und hinreichend dafür, daß die Diffgl.n* $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ *durch B. T. auf die Form* $y'' = 0$, $y'' = \infty$ *gebracht werden können. Sie sind zugleich die Int. Bedgg.n des Systems* (94) *und der Defgl.n* (45) *der* $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$.

§ 4. Ergänzungen zum § 3.

1. Nach Satz 6 geht das System (96) bei Vertauschung von α, β in ein gleichwertiges über, das wir so schreiben:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \mathsf{M}^*_\beta + 6\beta_{33} + \beta_2 \mathsf{M}^* + 3\beta_3 \Lambda^* = 0, \\ &\text{(b)} \quad 2\mathsf{N}^*_2 - 2\overline{\omega}\mathsf{M}^*_2 - 3\Lambda^*_{22} + 6\overline{\omega}_{33} - 6\overline{\beta}_{23} - 3(\overline{\omega}\Lambda^*)_3 + \overline{\beta}(3\Lambda^*_2 - 4\mathsf{N}^*) - \overline{\omega}_2 \mathsf{M}^* = 0; \end{aligned} \tag{111}$$

wir verabreden nämlich, mit F^* die Größe zu bezeichnen, welche aus einer von α, β abhängigen Größe $F(\alpha, \beta)$ durch Vertauschung von α, β entsteht. $\overline{\omega}^*$ ist einfach gleich

$-\bar{\omega}$. In (96 b) tritt nun gar keine Operation f_{1111} auf, und es kann auch keine hineingeraten durch die Relationen zwischen den $f_{i_1 \dots i_q}$ $(i_1, \dots, i_q = 1, 2)$, da diese Relationen nur in den Indizes 1, 2 *gemischte* Operationen enthalten. Dagegen ist (96 a) *auflösbar* nach $\bar{\omega}_{1111}$, da $\bar{\omega}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$ darin vorkommt. Soll nun (111 b) eine Folge von (96 a, b) sein — auch (111 b) enthält keine Operation f_{1111} —, dann kann dies nur so geschehen, daß (111 b) eine Folge von (96 b) allein ist:

Satz 11. *Die Relation* (96 b) *wird bei Vertauschung von* α, β *reproduziert.*

Die Relation (96 a) lautet ausgerechnet:

$$
\begin{aligned}
&\omega^3\omega_{\alpha\alpha\alpha\alpha} - \omega^2\omega_{\alpha\alpha\alpha}(8\omega_\alpha + 2\omega\alpha_2) - 6\omega^2\omega_{\alpha\alpha}^2 \\
&\qquad + \omega\omega_{\alpha\alpha}\{\omega^2(-8\alpha_{2\alpha} + 10\alpha_3 - \alpha_2^2) + 12\omega\alpha_2\omega_\alpha + 36\omega_\alpha^2\} \\
&- 24\omega_\alpha^4 - 12\omega\alpha_2\omega_\alpha^3 + \omega^2\omega_\alpha^2(-20\alpha_3 + 16\alpha_{2\alpha} + 2\alpha_2^2) \\
&\qquad + \omega^3\omega_\alpha(10\alpha_{3\alpha} - 7\alpha_{2\alpha\alpha} - 10\alpha_2\alpha_3 + 3\alpha_2\alpha_{2\alpha} + 2\alpha_2^3) \\
&+ \omega^4(-3\alpha_{3\alpha\alpha} + 2\alpha_{2\alpha\alpha\alpha} + 5\alpha_2\alpha_{3\alpha} - 2\alpha_2\alpha_{2\alpha\alpha} + 14\alpha_3\alpha_{2\alpha} \\
&\qquad - 4\alpha_{2\alpha}^2 + 2\alpha_2^2\alpha_3 - 4\alpha_2^2\alpha_{2\alpha} - 9\alpha_3^2) \\
&+ \omega^5(-\alpha_{22\alpha\alpha} + 4\alpha_{32\alpha} - 6\alpha_{33} + 4\alpha_2\alpha_{32} - \alpha_2\alpha_{22\alpha} - 3\alpha_{22}\alpha_3) = 0.
\end{aligned}
\tag{112}
$$

Die vorstehende Relation ist nicht symmetrisch in α, β. Also können wir sagen:

Satz 12. *Die beiden Relationen*

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \mathsf{M}_\alpha + 6\alpha_{33} + \alpha_2\mathsf{M} + 3\alpha_3\Lambda = 0, \\
&\text{(b)} \quad \mathsf{M}_\beta^* + 6\beta_{33} + \beta_2\mathsf{M}^* + 3\beta_3\Lambda^* = 0
\end{aligned}
\tag{$\overline{112}$}
$$

sind notwendig und hinreichend dafür, daß $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ *in* $y'' = 0$, $y'' = \infty$ *transformiert werden können.*

Denn die Gleichungen ($\overline{112}$) sind voneinander unabhängig und mehr als zwei unabhängige Relationen vierter Stufe zwischen α, β kann es nicht geben. Die Relationen ($\overline{112}$) sehen einfacher aus als die Relationen (96); jedoch läßt sich in ($\overline{112}$ b) der Grenzübergang $\beta \to \infty$ nicht so schnell vollziehen wie in (96 b).

Gąsiorowski [9]) hat auf Grund ganz andersartiger Überlegungen ebenfalls die Relationen aufgestellt, die bestehen müssen, damit $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ in $y'' = 0$, $y'' = \infty$ übergehen können. Er gelangt dabei zu zwei Formeln, von denen die erste bis auf die andere Bezeichnungsweise mit (112) übereinstimmt, während er die zweite aus der ersten durch Vertauschung der Größen gewinnt, die bei ihm den Größen α, β entsprechen.

2. In Ziffer **1** des vorigen Paragraphen wurde gezeigt, daß jede G_2 von B. T.n der Ebene unendlich viele gewöhnliche Diffgl.n 2. O. invariant läßt. Eine formale Beziehung führte dann in Ziffer **2** dazu, unter den unendlich vielen invarianten Diffgl.n 2. O. der Gruppe (56) die Diffgl. $y'' + \alpha = 0$ durch die Benennung *ausgezeichnete Diffgl.* hervorzuheben. Diese formale Beziehung — repräsentiert durch die Formeln (59) bis (61′) — bleibt auch gültig, wenn wir unter (56) die Defgl.n einer beliebigen G_2 verstehen, die nicht kommutativ zu sein braucht. Wir wollen nun auf den inneren Grund für die besondere Rolle der ausgezeichneten Diffgl. zu sprechen kommen.

Nach Satz 7 besitzt jede G_2 *eine* wesentliche Invariante $I(x, y, y')$. Daher ist die aus

$$I(x, y, y') = \text{const.} \tag{113}$$

hervorgehende Diffgl. 2. O.

$$I_1 + I_2 y'' = 0, \quad y'' + \frac{I_1}{I_2} = 0 \tag{114}$$

invariant gegenüber G_2, und durch (113) werden ∞^1 *erste Integrale* von (114) dargestellt.

[9]) A. a. O. [2]).

Aus der Tatsache, daß $I(x, y, y')$ Invariante von G_2 ist, folgt vermöge (16) als Defgl. erster Stufe für G_2 die Gleichung

$$(115) \qquad -I_2U_1 + I_1U_2 - I_3U = 0.$$

Ist $I_2 = 0$, so ist $I(x, y)$ Invariante nullter Ordnung, und G_2 ist intransitive P. T.s-Gruppe (aus (115) folgt nämlich vermöge (3) und (5) $U_{22} = 0$ für $I_2 = 0$). Die Diffgl. 2. O. (114) ist wegen (115) im Sinne von § 3, **2** die ausgezeichnete Diffgl. der Gruppe G_2, und es ist hiermit von neuem bewiesen, daß die ausgezeichnete Diffgl. nach Ausübung einer B. T. wieder in die ausgezeichnete Diffgl. der neuen G_2 übergeht; denn der Zusammenhang der Formeln (113) bis (115) kann ja durch B. T.n nicht gestört werden. Zugleich sehen wir, *daß die ausgezeichnete Diffgl. einer G_2 dadurch als ausgezeichnet charakterisiert ist, daß sie allein von allen invarianten Diffgl.n 2. O. der G_2 ∞^1 invariante erste Integrale besitzt.*

(115) ist die Defgl. der unendlichen Gruppe, welche $I(x, y, y')$ invariant läßt. Wir fragen nun umgekehrt, wann durch eine Gleichung

$$\varrho U_1 + \sigma U_2 + \tau U = 0$$

oder

$$(116) \qquad U_1 = \alpha U_2 + \lambda U$$

eine unendliche Gruppe definiert wird, welche *eine* Invariante $I(x, y, y')$ besitzt. Die Forderung, daß (115) eine Folge von (116) sein soll, ergibt die zwei Gleichungen

$$AI \equiv \frac{\partial I}{\partial x} - (\alpha + y'\lambda)\frac{\partial I}{\partial y'} = 0, \qquad BI \equiv \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda\frac{\partial I}{\partial y'} = 0,$$

welche nach bekannten Sätzen über lineare homogene partielle Diffgl.n 1. O. nur dann *eine* wesentliche gemeinschaftliche Lösung zulassen, wenn $(AB) \equiv 0$. Das liefert:

$$(117) \qquad \lambda_1 = \alpha\lambda_2 - \lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_3.$$

Da die durch (56) definierte G_2 *eine* Invariante $I(x, y, y')$ besitzt, ist sie Untergruppe der unendlichen Gruppe (115), und (56 a) muß mit (115) gleichwertig sein. Daher müssen λ, α in der Beziehung (117) stehen; in der Tat ist (117) mit (94 a) identisch (wobei allerdings (94 a) nur für kommutative Gruppen (56) abgeleitet worden ist).

3. Wir haben noch nicht angegeben, wie die Defgl.n einer *intransitiven* P. T.s-Gruppe $\mathcal{G}_2(\infty, \beta)$ aussehen. Wir gewinnen sie ohne Rechnung, wenn wir beachten, daß das allgemeine System (56) auch so geschrieben werden kann:

$$(118) \qquad \begin{gathered} U_2 = \alpha' U_1 + \lambda' U \qquad \left(\alpha' = \frac{1}{\alpha}, \quad \lambda' = -\frac{\lambda}{\alpha}\right) \\ U_{11} = \gamma' U_1 + \vartheta' U, \quad U_{12} = \overline{\gamma}' U_1 + \overline{\vartheta}' U. \end{gathered}$$

Diese Form geht aus (56) hervor durch Vertauschung der Indizes 1, 2 und Akzentuierung einander entsprechender Größen, also durch die Substitution

$$(119) \qquad \begin{pmatrix} f & \partial_1 & \partial_2 \\ f' & \partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix},$$

worin f eine mit (56) verknüpfte Größe bedeutet, f' die ihr in bezug auf (118) entsprechende. Die Bedingung der Invarianz der Diffgl. $\beta' y'' + 1 = 0 \left(\beta' = \frac{1}{\beta}\right)$ lautet, wenn wir in ($\overline{90}$) durch β^2 dividieren:

$$(120) \qquad -\beta'^2 U_{11} + \beta'(U_{12} + U_{21}) - U_{22} - \beta_1' U_2 + \beta_2' U_1 + \beta_3' U = 0;$$

sie entsteht aus ($\overline{90}$) ebenfalls vermöge der Substitution (119). Ferner geht das System der Relationen zwischen den Operationen der q-ten Stufe $f_{i_1 \dots i_q}$ $(i_1, \dots, i_q = 1, 2)$ bei Vertauschung der Indizes 1, 2 als Ganzes in sich über, während $W = \{U^{(1)}\ U^{(2)}\}$

in $\{U^{(2)}\ U^{(1)}\} = -W$ verwandelt wird; es ist aber gleichgültig, ob man W oder $-W$ in eine lineare homogene partielle Diffgl. einsetzt. Somit bekommen wir durch die Substitution (119) sämtliche Relationen zwischen den gestrichenen Größen aus den Gleichungen zwischen den ungestrichenen. Für die $\mathcal{G}_2(\infty, \beta)$ haben wir daher die Formeln

(es ist $\alpha' = 0$ zu setzen, wodurch $\bar{\omega}' = \dfrac{1}{\beta'} = \beta$, $\partial'_{\alpha'} = \partial_2$ wird)

$$(121) \qquad U_2 = \lambda' U, \quad U_{11} = \gamma' U_1 + \vartheta' U, \quad U_{12} = \bar{\gamma}' U_1 + \bar{\vartheta}' U;$$

$$(122) \qquad \begin{cases} \bar{\gamma}' = 2\lambda', \\ -\bar{\vartheta}' = -\frac{1}{2}\gamma'_2 + \frac{1}{2}\lambda'\gamma' + \lambda'_1, \\ \gamma' = 3\beta\lambda' - \beta_2, \\ \vartheta' = \frac{1}{2}\beta(\gamma'_2 - \lambda'\gamma') + \beta_1\lambda' - \beta_3; \end{cases}$$

$$(123) \qquad \begin{cases} \lambda'_2 = -\lambda'^2, \\ -\lambda'_3 = -\lambda'\lambda'_1 - \beta\lambda'^3 + \beta_2\lambda'^2 - \frac{1}{2}\beta_{22}\lambda' + \frac{1}{6}\beta_{222}, \\ \lambda'_{12} = -\lambda'\lambda'_1 + \beta\lambda'^3 - \beta_2\lambda'^2 + \frac{1}{2}\beta_{22}\lambda' - \frac{1}{6}\beta_{222}, \\ \lambda'_{11} = -3\beta\lambda'\lambda'_1 + \beta_2\lambda'_1 - \beta^2\lambda'^3 + (\beta\beta_2 - \beta_1)\lambda'^2 \\ \qquad + (-\beta_3 + \beta_{21} - \frac{1}{2}\beta\beta_{22})\lambda' - \frac{1}{3}(-\beta_{23} + \beta_{221}) + \frac{1}{6}\beta\beta_{222}; \end{cases}$$

$$(124) \qquad \begin{cases} \text{(a)} & \beta_{2222} = 0, \\ \text{(b)} & -6\beta_{33} + 4\beta_{231} - \beta_{2211} - 3\beta\beta_{223} + 2\beta\beta_{2221} \\ & + \beta_1\beta_{222} + 4\beta_2\beta_{23} - 3\beta_{22}\beta_3 - \beta_2\beta_{221} = 0. \end{cases}$$

(124 a, b) entstehen in dieser Reihenfolge aus (96 a, b) und sind mit (83 b, a) (s. (99)) identisch, wenn darin β statt α geschrieben wird, wie es nach Satz 6 sein muß. Natürlich hätte man die Relationen (124) von vornherein hinschreiben können, da ja die Diffgl. $y'' + \beta = 0$ durch P. T. die Form $y'' = 0$ annehmen kann. Das System (123) ist wieder vermöge (124) integrabel und besitzt ∞^2 Lösungen.

§ 5. Die allgemeinsten mit $p, q, xp + yq$ und der affinen G_6 der Ebene ähnlichen Gruppen von Berührungstransformationen.

1. Die allgemeine projektive Gruppe (31) enthält die dreigliedrige Untergruppe

$$(125) \qquad p, q;\ xp + yq$$

mit den endlichen Trf.n

$$\bar{x} = cx + a, \quad \bar{y} = cy + b,$$

d. h. den Translationen und den Dehnungen von irgend einem Punkte aus, bei denen die Richtungen erhalten bleiben. *Die Untergruppe* (125) *ist invariant in der affinen G_6, so daß sie in der projektiven G_8 mit ∞^2 Untergruppen gleichberechtigt ist.* Man bestätigt leicht, daß die Defgl.n für die ch. Fu. $\mathfrak{V}$ der Gruppe

$$(125') \qquad \mathfrak{p}, \mathfrak{q};\ \mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}\mathfrak{q}$$

dargestellt werden durch

$$(126) \qquad \mathfrak{V}_{\mathrm{I}} = 0, \quad \mathfrak{V}_{\mathrm{II\,II}} = 0.$$

Daher besitzt auch die allgemeinste mit (125′) ähnliche Gruppe von B. T.n — wir wollen sie mit $\mathcal{G}_3$ bezeichnen — eine Defgl. erster und eine zweiter Stufe:

$$(127) \qquad \begin{cases} \text{(a)} & V_1 = \alpha V_2 + \lambda V \\ \text{(b)} & V_{21} = \beta V_{22} + \hat{\gamma} V_2 + \hat{\vartheta} V. \end{cases}$$

In (127) sind die Ableitungen V, V_2, V_{22} unabhängig, während sich — ebenso wie aus (126) — sämtliche Ableitungen 3. Stufe bestimmen lassen.

Soll durch (127) überhaupt eine G_3 definiert werden, so müssen zwischen den Koef-

fizienten die Relationen

$$\Pi^{(i)}(\alpha, \lambda, \beta, \hat{\gamma}, \hat{\vartheta}, \alpha_1, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{128}$$

bestehen, die sich aus den Int. Bedgg.n sowie aus der Gruppenbedingung — daß zugleich mit $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ auch $\{V^{(1)} V^{(2)}\}$ eine Lösung von (127) sein soll — ergeben. Daß eine durch (127) + (128) definierte G_3 immer auch eine $\mathcal{G}_3$ ist, bleibt noch zu beweisen. Zu dem Zweck zeigen wir zunächst, daß die G_3 (127) die beiden Diffgl.n

$$y'' + \alpha = 0, \quad y'' + \beta = 0 \tag{129}$$

invariant läßt. Wir brauchen dazu zwei gruppentheoretische Sätze. Der erste ergibt sich so:

Möge durch das System von Defgl.n

$$\begin{cases} \gamma(x, y, y')\, U + \gamma^{(1)} U_1 + \gamma^{(2)} U_2 + \gamma^{(11)} U_{11} + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{130}$$

eine endliche Gruppe von B. T.n der Ebene definiert werden. Die vermöge (130) unabhängigen Ableitungen von U wollen wir mit $U^{(\nu)}$ bezeichnen ($\nu = 1, \ldots, N$). Wir erweitern die allgemeine inf. Trf. Xf der Gruppe (130) ($M-1$)-mal durch Hinzunahme der Ableitungen $y'', \ldots, y^{(M)}$ zu $X^{(M)}f$. Die Berechnung von $X^{(M)}f$ geschieht auf Grund der Formeln (27), (15) und (39). $X^{(M)}f$ wird eine lineare homogene Funktion der Ableitungen von U und kann vermöge (130) so umgeformt werden, daß nur noch die N unabhängigen Ableitungen $U^{(\nu)}$ auftreten:

$$X^{(M)}f = \sum_{\nu=1}^{N} U^{(\nu)} C^{(\nu)} f. \tag{131}$$

Die $C^{(\nu)}f$ sind ganze rationale Funktionen von $y'', \ldots, y^{(M)}$ mit von x, y, y' abhängigen Koeffizienten. Nun gilt

Satz 13. *Die Symbole $C^{(1)}f, \ldots, C^{(N)}f$ stehen in der Beziehung*

$$(C^{(j)} C^{(k)}) = \sum_{\nu=1}^{N} \psi_{jk\nu}(x, y, y')\, C^{(\nu)} f \qquad (j, k = 1, \ldots, N).$$

Seien nämlich Xf, Yf zwei beliebige inf. Trf.n der Gruppe (130) mit den ch. Fu.n U, V. Dann ist:

$$\begin{aligned} (X^{(M)} Y^{(M)}) &= \left(\sum_{j=1}^{N} U^{(j)} C^{(j)}, \sum_{k=1}^{N} V^{(k)} C^{(k)} \right) = \sum_{j,k=1}^{N} (U^{(j)} C^{(j)}, V^{(k)} C^{(k)}) \\ &= \sum_{j,k=1}^{N} U^{(j)} V^{(k)} (C^{(j)} C^{(k)}) + \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} U^{(j)} C^{(j)} V^{(k)} \right) C^{(k)} f - \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N} V^{(k)} C^{(k)} U^{(j)} \right) C^{(j)} f \\ &= \sum_{j,k=1}^{N} U^{(j)} V^{(k)} (C^{(j)} C^{(k)}) + \sum_{k=1}^{N} X V^{(k)} \cdot C^{(k)} f - \sum_{j=1}^{N} Y U^{(j)} \cdot C^{(j)} f; \end{aligned}$$

wegen (16) sind die beiden letzten Summen bilinear in den $U^{(\mu)}$, $V^{(\nu)}$, d. h. es gilt

$$(X^{(M)} Y^{(M)}) = \sum_{j,k=1}^{N} U^{(j)} V^{(k)} (C^{(j)} C^{(k)}) + \sum_{j,k=1}^{N} U^{(j)} V^{(k)} \sum_{\nu=1}^{N} \varphi_{jk\nu}(x, y, y')\, C^{(\nu)} f. \tag{132}$$

Andererseits ist nach (16) u. (17) vermöge (130)

$$(X^{(M)} Y^{(M)}) = Z^{(M)} f = \sum_{\nu=1}^{N} W^{(\nu)} C^{(\nu)} f = \sum_{j,k=1}^{N} U^{(j)} V^{(k)} \sum_{\nu=1}^{N} \chi_{jk\nu}(x, y, y')\, C^{(\nu)} f. \tag{133}$$

Der Vergleich von (132) u. (133) liefert Satz 13.

Der zweite der hier angekündigten Sätze lautet:

Satz 14 [10]**.** Die m Symbole

$$X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

[10]) Beweis bei Lie-Engel, a. a. O. [5]), Abschn. 1, Kap. 14, §§ 67-68.

mögen in der Beziehung stehen:

$$(X_j X_k) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{jki}(x_1, \ldots, x_n)\, X_i f \qquad (j, k = 1, \ldots, m).$$

Ist $\overline{m}$ die kleinere der Zahlen m und n, so sollen die h-reihigen ($h \leqq \overline{m}$) Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{m1} & \cdots & \xi_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $\Delta_1^{(h)}, \ldots, \Delta_{N_h}^{(h)}$ bezeichnet werden. Dann gilt

$$X_j \Delta_\mu^{(h)} = \sum_{\nu=1}^{N_h} \tau_{j\mu\nu}(x_1, \ldots, x_n) \Delta_\nu^{(h)} \quad (j = 1, \ldots, m;\ \mu = 1, \ldots, N_h).$$

Ferner gestattet das Gleichungssystem

$$\Delta_1^{(h)} = 0, \ldots, \Delta_{N_h}^{(h)} = 0$$

die inf. Trf.n $X_1 f, \ldots, X_m f$, sobald sich die σ_{jki} für die aus ihm bestimmten Wertsysteme $(x_1, \ldots, x_n)$ regulär verhalten.

Wenn wir uns nun wieder zur Gruppe (127) zurückwenden, bekommen wir bei einmaliger Erweiterung durch Hinzunahme von y'' nach (131):

(134) $$X'' f = V \cdot Af + V_2 Bf + V_{22} Cf,$$

und Af, Bf, Cf sind nach (15), (39) und (127) durch die folgende Matrix bestimmt:

(135)
$$\begin{array}{c} \\ Af \\ Bf \\ Cf \end{array} \begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y'} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y''} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\lambda & * \\ 1 & y' & -\alpha & * \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta - (\alpha+\beta)\, y'' - y''^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Auf Grund der Sätze 13 uud 14 ergibt Nullsetzen der dreireihigen Determinanten der Matrix (135) ein invariantes System von (Differential-)Gleichungen der Gruppe (127). Diese dreireihigen Determinanten verschwinden dann und nur dann, wenn

$$y''^2 + (\alpha + \beta)\, y'' + \alpha\beta = (y'' + \alpha)(y'' + \beta) = 0.$$

Also läßt die Gruppe (127) — vermöge der Relationen (128) — in der Tat die beiden Diffgl.n (129) invariant.

Soll nun auch noch die Diffgl. $y'' + \varepsilon = 0$ invariant sein, so folgt aus

(136) $$-V_{11} + \varepsilon(V_{12} + V_{21}) - \varepsilon^2 V_{22} + \varepsilon_1 V_2 - \varepsilon_2 V_1 - \varepsilon_3 V = 0$$

vermöge (127) wegen des Verschwindens des Koeffizienten von V_{22}:

$$(\alpha - \varepsilon)(\varepsilon - \beta) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon = \alpha \text{ oder } \varepsilon = \beta.$$

Wir haben also den Satz:

Satz 15. *Die durch* (127) + (128) *definierte G_3 läßt nur zwei gewöhnliche Diffgl.n 2. O. invariant, nämlich* $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$.

Eine unmittelbare Folge davon ist, daß eine B. T. (6) das System (127) in ein System

(137)
$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \mathfrak{V}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{a}\, \mathfrak{V}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{l}\, \mathfrak{V} \\ \text{(b)} & \mathfrak{V}_{\mathrm{II\,I}} = \mathfrak{b}\, \mathfrak{V}_{\mathrm{II\,II}} + \mathfrak{g}\, \mathfrak{V}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{d}\, \mathfrak{V} \end{array}$$

und $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ in $\mathfrak{y}'' + \mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{y}'' + \mathfrak{b} = 0$ überführt. Transformieren wir $y'' + \beta = 0$ in $\mathfrak{y}'' = \infty$, so erhalten wir *unter der von jetzt ab gültigen Voraussetzung* $\alpha \neq \beta$ ein System

(138) $$\mathfrak{V}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{a}\, \mathfrak{V}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{l}\, \mathfrak{V}, \qquad \mathfrak{V}_{\mathrm{II\,II}} = 0,$$

welches eine *transitive* G_3 von P. T.n definiert.

Wegen Satz 15 besitzt die Gruppe (127) keine Differentialinvariante 2. O.; weil aber die Diffgl.n

$$\bar{Y}''f = 0, \quad \bar{\bar{Y}}''f = 0, \quad \underline{Y}''f = 0$$

auf jeden Fall eine gemeinsame Lösung zulassen ($\bar{Y}f$, $\bar{\bar{Y}}f$, $\underline{Y}f$ sind drei linear unabhängige inf. Trf.n der G_3 (127)), *besitzt die Gruppe* (127) *eine Invariante 1. O.* $I(x, y, y')$ *und auch nur eine wesentliche* (sonst wären wegen (115) zwei Defgl.n erster Stufe vorhanden). Transformieren wir (127) in (138), so muß die neue Invariante $\mathfrak{J}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$ wirklich $\mathfrak{y}'$ enthalten, und durch

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}') = \text{const.} \tag{139}$$

sind ∞^1 invariante Diffgl.n 1. O. dargestellt. Nun hat Lie [11]) gefunden, daß alle G_3 von P. T.n der Ebene, die ∞^1 Diffgl.n 1. O. invariant lassen, durch P. T. mit der Gruppe (125) ähnlich sind. Damit ist der auf S. 146 geforderte Nachweis erbracht:

Satz 16. *Durch* (127) + (128) *wird für* $\alpha \neq \beta$ *die allgemeinste mit* $p, q, xp + yq$ *ähnliche* G_3 *von B. T.n definiert.*

Die Notwendigkeit der Voraussetzung $\alpha \neq \beta$ in dem letzten Satze erkennt man direkt, wenn man aus (127) die Ableitungen 3. Stufe von V berechnet. Man findet nämlich, daß zu dem Zwecke durch $\beta - \alpha$ dividiert werden muß. Diese Division ist unausführbar im Falle $\beta - \alpha = 0$; d. h. unter diesen Umständen wird durch (127) überhaupt keine endliche Gruppe definiert.

2. Die durch (127) bestimmte $\mathcal{G}_3$ sei mit $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta)$ ($\neq \mathcal{G}_3(\beta, \alpha)$) bezeichnet. Aus (der Bemerkung zu) Satz 15 folgt zusammen mit Satz 16:

Satz 17. *Gestatten zwei Diffgl.n* $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ *eine* $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta)$, *so können sie die Form* $y'' = 0$, $y'' = \infty$ *erhalten. Die Relationen* (96) *sind daher eine Folge der Relationen* (128). *Jede* $\mathcal{G}_3(\alpha. \beta)$ *bestimmt eindeutig die* $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$.

Die Ausrechnung der Relationen (128) ist praktisch nicht leicht; wir können sie jedoch umgehen mit Rücksicht auf Theorem 1. Nach Satz 16 steckt in jeder $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta)$ eine $\mathcal{G}_2$ und zwar eine $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$, denn die Defgl. erster Stufe der $\mathcal{G}_2$ muß dieselbe sein wie die der $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta)$. Daraus folgt übrigens, daß eine $\mathcal{G}_3$ auch nur eine einzige $\mathcal{G}_2$ enthält, weil eine $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$ eindeutig durch ihre Defgl. 1. Stufe bestimmt wird (Formeln (85), (86), (93)). Wir haben also für die Koeffizienten α, β, λ der $\mathcal{G}_3$ (127) die Relationen (94) und (96), weiter keine.

Nun ist (127) Untergruppe von (45). Aus der zweiten der Gleichungen (45) erhalten wir für $K = V$ vermöge (127) durch Nullsetzen der Koeffizienten von V und V_2:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &= -\lambda + \frac{1}{\omega}(-\omega_1 + \alpha\beta_2 - \alpha_2\beta) \\ \hat{\vartheta} &= -\lambda_2 + \frac{1}{\omega}(\omega_2\lambda + \omega_3). \end{aligned} \tag{140}$$

Damit ist gefunden, daß die Relationen (128) *durch* (94), (96), (140) *dargestellt werden.*

Es bleiben noch die Spezialfälle einer $\mathcal{G}_3(\alpha, \infty)$ und $\mathcal{G}_3(\infty, \beta)$, von denen die erste transitive, die zweite intransitive P. T.s-Gruppe ist. Die $\mathcal{G}_3(\alpha, \infty)$ wird definiert durch

$$V_1 = \alpha V_2 + \lambda V, \quad V_{22} = 0, \tag{141}$$

wobei zwischen α, λ die Relationen (82) und (83) bestehen. Die Gleichungen, welche eine $\mathcal{G}_3(\infty, \beta)$ charakterisieren, gewinnen wir mit Rücksicht auf die Ausführungen in § 4, **3**, indem wir auf die eine $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta)$ charakterisierenden Relationen die Substitution (119) in sinngemäßer Übertragung anwenden und nachträglich $\alpha' = 0$ setzen. Wir

[11]) A. a. O. [5]), Abschn. 3, S. 73.

bekommen so als Defgl.n einer $\mathcal{G}_3(\infty, \beta)$:

$$V_2 = \lambda' V, \qquad V_{12} = \frac{1}{\beta} V_{11} + \hat{\gamma}' V_1 + \hat{\vartheta}' V, \tag{142}$$

$$\hat{\gamma}' = -\lambda' + \frac{\beta_2}{\beta}$$
$$\hat{\vartheta}' = -\lambda_1' + \frac{1}{\beta}(-\beta_1 \lambda' + \beta_3). \tag{143}$$

Für β, λ' haben wir wieder die Beziehungen (123) und (124). Wie sich schließlich noch der Grenzübergang $\beta \to 0$ an der $\mathcal{G}_3(\infty, \beta)$ vollzieht, ist ohne weiteres zu übersehen.

3. Die sechsgliedrige affine Gruppe

$$\mathfrak{p}, \mathfrak{q}; \ \mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}\mathfrak{q}; \ \mathfrak{y}\mathfrak{p}, \ \mathfrak{x}\mathfrak{q}, \ \mathfrak{x}\mathfrak{p} - \mathfrak{y}\mathfrak{q} \tag{144}$$

besitzt für ihre ch. Fu. $\mathfrak{W}$ die Defgl.n

$$\mathfrak{W}_{II\,II} = 0, \quad \mathfrak{W}_{II} = 0, \quad \mathfrak{W}_{III} = 0; \tag{145}$$

die allgemeinste Lösung von (145) hat nämlich die Gestalt

$$\mathfrak{W} = (a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y})\,\mathfrak{y}' + \bar{a} + \bar{b}\mathfrak{x} + \bar{c}\mathfrak{y},$$

und dies ist in der Tat die allgemeine ch. Fu. zu (144). Daher genügen auch für die allgemeinste mit (144) ähnliche Gruppe von B. T.n — wir bezeichnen sie mit $\mathcal{G}_6$ — drei Defgl.n, nämlich zwei von 2. und eine von 3. Stufe. Jede $\mathcal{G}_6$ ist Untergruppe einer $\mathcal{G}_8$, d. h. ihre ch. Fu. $\mathfrak{W}$ befriedigt die beiden Defgl.n (45) der $\mathcal{G}_8$, in der sie steckt. Darin liegt schon, *daß jede $\mathcal{G}_6$ in genau einer Obergruppe $\mathcal{G}_8$ vorkommt.* Die Defgl. 3. Stufe für die $\mathcal{G}_6$ läßt sich herleiten durch Benutzung des Umstandes, daß jede $\mathcal{G}_6$ eine invariante $\mathcal{G}_2$ enthält, die wir uns durch (56) gegeben denken dürfen.

Soll die $\mathcal{G}_6$ die durch (56) definierte $\mathcal{G}_2$ invariant lassen, so muß nach Lie der Ausdruck $\{WU\}$ eine Lösung von (56) darstellen, wenn W die allgemeine ch. Fu. der $\mathcal{G}_6$ und U die allgemeine Lösung von (56) bedeutet. Man findet nun aus (17), wenn man vermöge (56) und der zu (56) gehörigen Relationen in der Gleichung

$$\{WU\}_1 = \alpha\{WU\}_2 + \lambda\{WU\}$$

die Koeffizienten von U ausrechnet und vergleicht:

$$W_{31} - \alpha W_{32} + \lambda W_{21} - \alpha\lambda W_{22} - \lambda_2 W_1 + \lambda_1 W_2 + (-\bar{\vartheta}_\alpha - \lambda_{2\alpha} - \lambda\bar{\vartheta})W = 0$$

oder wegen (88):

$$W_{31} - \alpha W_{32} + \lambda W_{21} - \alpha\lambda W_{22} - \lambda_2 W_1 + \lambda_1 W_2 - \lambda_3 W = 0.$$

Das ist die gesuchte Defgl. 3. Stufe. Die Defgl.n der $\mathcal{G}_6$ sind daher:

$$\text{(146)} \quad \begin{array}{ll} & -W_{11} + \alpha(W_{12} + W_{21}) - \alpha^2 W_{22} + \alpha_1 W_2 - \alpha_2 W_1 - \alpha_3 W = 0, \\ \text{(a)} & -W_{11} + \beta(W_{12} + W_{21}) - \beta^2 W_{22} + \beta_1 W_2 - \beta_2 W_1 - \beta_3 W = 0, \\ \text{(b)} & W_{31} - \alpha W_{32} + \lambda W_{21} - \alpha\lambda W_{22} + \lambda_1 W_2 - \lambda_2 W_1 - \lambda_3 W = 0. \end{array}$$

Zwischen α, β, λ bestehen dabei die Relationen (94) und (96).

Theorem 2. *Die allgemeinste mit der affinen G_6 der Ebene ähnliche Gruppe von B. T.n wird durch* (146), (94), (96) *charakterisiert.*

Die durch (146) definierte $\mathcal{G}_6$ bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_6\,(\alpha, \beta)$ $(\neq \mathcal{G}_6(\beta, \alpha))$. Aus der Gestalt der Gleichung (146 b) ist zu ersehen, daß eine $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta)$ nur *eine* invariante $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$ und daher auch nur *eine* invariante $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta)$ enthält. Infolgedessen *läßt die $\mathcal{G}_6$ (α, β) nach Satz* 15 *nur die beiden gewöhnlichen Diffgl.n 2. O. $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ invariant.* Durch (94) werden ∞^2 Gruppen $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta)$ bestimmt, welche der letzten Bemerkung zufolge in der $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta)$ gleichberechtigt sein müssen. Das stimmt mit der Tatsache überein, daß es in der projektiven G_8 zur affinen G_6 ∞^2 gleichberechtigte Untergruppen gibt.

Die Defgl.n einer $\mathcal{G}_6(\alpha, \infty)$ lauten:

$$(147)\quad \begin{cases} -W_{11} + \alpha(W_{12} + W_{21}) - \alpha^2 W_{22} + \alpha_1 W_2 - \alpha_2 W_1 - \alpha_3 W = 0, \\ W_{22} = 0, \\ W_{31} - \alpha W_{32} + \lambda W_{21} - \alpha\lambda W_{22} + \lambda_1 W_2 - \lambda_2 W_1 - \lambda_3 W = 0. \end{cases}$$

Die Defgl.n einer $\mathcal{G}_6(\infty, \beta)$ gewinnen wir wieder mit Hilfe der Substitution (119) und des Grenzübergangs $\alpha' \to 0$:

$$(148)\quad \begin{cases} -W_{11} + \beta(W_{12} + W_{21}) - \beta^2 W_{22} + \beta_1 W_2 - \beta_2 W_1 - \beta_3 W = 0, \\ W_{22} = 0, \\ -W_{32} + \lambda' W_{12} + \lambda_2' W_1 - \lambda_1' W_2 + \lambda_3' W = 0. \end{cases}$$

Zwischen α, λ in (147) bestehen die Relationen (82) und (83), zwischen β, λ' in (148) die Relationen (123) und (124).

§ 6. Der Dualismus in der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$. Weitere wichtige Untergruppen.

1. Da in der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ die beiden Diffgl.n $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ vollkommen gleichberechtigt sind, enthält sie auch je ∞^2 durch Trf.n der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ ähnliche Untergruppen $\mathcal{G}_i(\beta, \alpha)$ $(i = 2, 3, 6)$. *Jede der* ∞^2 $\mathcal{G}_i(\alpha, \beta)$ *ist zu jeder der* ∞^2 $\mathcal{G}_i(\beta, \alpha)$ *in bezug auf* $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ *dualistisch* (s. S. 134). Es genügt, dies nachzuweisen z. B. für zwei $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta)$, $\mathcal{G}_3(\beta, \alpha)$. Denn jede $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta)$ bestimmt ja eindeutig 1) ihre Untergruppe $\mathcal{G}_2(\alpha)$, 2) die $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta)$, welche die größte die $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta)$ als invariante Untergruppe umfassende Untergruppe von $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ ist. Das Analoge gilt für eine $\mathcal{G}_3(\beta, \alpha)$. Nun sind nach Satz 16 zwei $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta)$, $\mathcal{G}_3(\beta, \alpha)$ durch B. T. zueinander ähnlich; nach Satz 15 muß aber eine derartige B. T. die Diffgl.n $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ miteinander vertauschen, d. h. sie ist eine in bezug auf $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ dualistische Trf. Von der dualistischen Beziehung zweier $\mathcal{G}_i(\alpha, \beta)$, $\mathcal{G}_i(\beta, \alpha)$ überzeugt man sich auch unmittelbar auf Grund der Bemerkung, daß die beiden projektiven Gruppen $\mathcal{G}_2(0, \infty)$ (50) und $\mathcal{G}_2(\infty, 0)$ (52) vermöge (54) zueinander dualistisch sind.

Die Defgl.n der $\mathcal{G}_i(\beta, \alpha)$ $(i = 2, 3, 6)$ ergeben sich einfach mit Hilfe der auf S. 142 eingeführten Sternsymbolik:

$$(149_2)\quad \begin{cases} \text{(a)} & U_1^* = \beta U_2^* + \mu U^*, \\ \text{(b)} & U_{22}^* = \gamma^* U_2^* + \vartheta^* U^*, \quad U_{21}^* = \bar{\gamma}^* U_2^* + \bar{\vartheta}^* U^*, \end{cases}$$

$$(149_3)\quad V_1^* = \beta V_2^* + \mu V^*, \quad V_{21}^* = \alpha V_{22}^* + \hat{\gamma}^* V_2^* + \hat{\vartheta}^* V^*,$$

$$(149_6)\quad \begin{cases} -W_{11}^* + \beta(W_{12}^* + W_{21}^*) - \beta^2 W_{22}^* + \beta_1 W_2^* - \beta_2 W_1^* - \beta_3 W^* = 0, \\ -W_{11}^* + \alpha(W_{12}^* + W_{21}^*) - \alpha^2 W_{22}^* + \alpha_1 W_2^* - \alpha_2 W_1^* - \alpha_3 W^* = 0, \\ W_{31}^* - \beta W_{32}^* + \mu W_{21}^* - \beta\mu W_{22}^* + \mu_1 W_2^* - \mu_2 W_1^* - \mu_3 W^* = 0. \end{cases}$$

Zwischen β, α, μ bestehen die Gleichungen

$$(150)\quad \begin{cases} \mu_\beta = -\mu^2 - \beta_2\mu - \beta_3 \ (\mu_1 = \beta\mu_2 - \mu^2 - \beta_2\mu - \beta_3) \\ \mu_3 = -\mu\mu_2 + \bar{\omega}\mu^3 + \bar{\beta}\mu^2 - \tfrac{1}{2}\Lambda^*\mu + \tfrac{1}{6}\mathsf{M}^*, \\ \mu_{2\beta} = -\mu\mu_2 - \bar{\omega}\mu^3 - \bar{\beta}\mu^2 + (\tfrac{1}{2}\Lambda^* - \beta_{22})\,\mu - \tfrac{1}{6}\mathsf{M}^* - \beta_{32}, \\ \mu_{22} = 3\bar{\omega}\mu\mu_2 + \bar{\beta}\mu_2 - \bar{\omega}^2\mu^3 + (\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}\bar{\beta})\,\mu^2 \\ \qquad\qquad + (\tfrac{1}{2}\bar{\omega}\Lambda^* - \bar{\omega}_3 + \bar{\beta}_2)\,\mu - \tfrac{1}{3}\mathsf{N}^* - \tfrac{1}{6}\bar{\omega}\,\mathsf{M}^*, \end{cases}$$

zwischen β, α die Gleichungen (111) oder (96). Ferner haben wir noch folgende Gleichungen zu (149_2) und (149_3):

$$(151_2)\qquad \begin{cases} \overline{\gamma}^* = \beta\gamma^* + 2\mu + \beta_2, \\ \beta\vartheta^* - \overline{\vartheta}^* = -\frac{1}{2}\gamma_\beta^* + \frac{1}{2}\mu\gamma^* + \frac{1}{2}\beta_2\gamma^* + \mu_2 + \frac{1}{2}\beta_{22}, \\ \gamma^* = -3\overline{\omega}\mu - \beta, \\ \vartheta^* = -\frac{1}{2}\overline{\omega}(\gamma_\beta^* - \mu\gamma^* - \beta_2\gamma^*) - \overline{\omega}_2\mu - \overline{\omega}_3 + \frac{1}{2}\overline{\omega}\beta_{22}, \end{cases}$$

$$(151_3)\qquad \begin{cases} \hat{\gamma}^* = -\mu + \dfrac{1}{\omega}(-\omega_1 + \alpha\beta_2 - \alpha_2\beta), \\ \hat{\vartheta}^* = -\mu_2 + \dfrac{1}{\omega}(\omega_2\mu + \omega_3). \end{cases}$$

2. Unterwerfen wir die Ebene $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der allgemeinsten B. T. (6), so treten an die Stelle der Punkte und Geraden die beiden Scharen von je ∞^2 Lösungskurven $\mathfrak{C}_\beta$, $\mathfrak{C}_\alpha$ der beiden Diffgl.n $y'' + \beta = 0$, $y'' + \alpha = 0$. Durch jedes Element (x, y, y') geht *eine* $\mathfrak{C}_\alpha$ und *eine* $\mathfrak{C}_\beta$. Einem Punkt und einer Geraden, welche inzidieren, entsprechen zwei Kurven $\mathfrak{C}_\beta$, $\mathfrak{C}_\alpha$, die ein Element (x, y, y') gemeinsam haben, d. h. die sich berühren. Jede $\mathfrak{C}_\alpha(\mathfrak{C}_\beta)$ wird von ∞^1 $\mathfrak{C}_\beta(\mathfrak{C}_\alpha)$ berührt. Aus der Tatsache, daß durch zwei Punkte *eine* Gerade geht und zwei Geraden sich in *einem* Punkte schneiden, wird jetzt die Tatsache, daß zwei $\mathfrak{C}_\alpha$, $\mathfrak{C}'_\alpha(\mathfrak{C}_\beta, \mathfrak{C}'_\beta)$ von *einer* $\mathfrak{C}_\beta(\mathfrak{C}_\alpha)$ berührt werden.

In sinngemäßer Übertragung der Verhältnisse innerhalb der projektiven $\mathcal{G}_8$ können wir folgendes feststellen: Jede Kurve $\mathfrak{C}_\alpha$ $(\mathfrak{C}_\beta)$ bleibt invariant gegenüber *einer* $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$ $(\mathcal{G}_2(\beta, \alpha))$ und zwar so, daß auch alle $\mathfrak{C}'_\beta$ $(\mathfrak{C}'_\alpha)$, die $\mathfrak{C}_\alpha(\mathfrak{C}_\beta)$ berühren, invariant sind; ebenso gilt das Umgekehrte. Somit ist jeder Lösung $\lambda(\mu)$ von (94) ((150)) *eine* $\mathfrak{C}_\alpha(\mathfrak{C}_\beta)$, jeder $\mathfrak{C}_\alpha(\mathfrak{C}_\beta)$ *eine* Lösung $\lambda(\mu)$ zugeordnet. Wir schreiben daher auch ausführlicher $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta, \lambda)$ statt $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$ usw.

Wir nennen nun ein Gruppenpaar $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta, \lambda)$, $\mathcal{G}_2(\beta, \alpha, \mu)$ ein Paar *erster* oder *zweiter Klasse*, je nachdem die Kurven $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$, $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ *elementefremd* sind oder sich *berühren*, d. h. je nachdem die *Durchschnittsgruppe* $[\mathcal{G}_2(\alpha, \beta, \lambda), \mathcal{G}_2(\beta, \alpha, \mu)]$ *leer* ist oder eine *eingliedrige Gruppe*. In der projektiven $\mathcal{G}_8$ wird nämlich ein Paar erster Klasse durch (50) und (52) repräsentiert, ein Paar zweiter Klasse durch die Gruppen (s. S. 135)

$$(152)\qquad p, q; \quad q, xq.$$

Die größte Untergruppe der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$, welche die beiden Kurven $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$, $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ invariant läßt, ist natürlich die Durchschnittsgruppe $[\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda), \mathcal{G}_6(\beta, \alpha, \mu)]$. Gehen wir auf das projektive Vorbild zurück, so sehen wir, daß diese Gruppe entweder fünf- oder viergliedrig ist, je nachdem $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$, $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ einander berühren oder nicht. Denn im letzteren Fall können wir als projektiven Repräsentanten den Durchschnitt

$$(153)\qquad xp + yq;\ yp,\ xq,\ xp - yq$$

der beiden G_6 (51) und (53) wählen, während wir als projektiven Repräsentanten des ersten Falles etwa den Durchschnitt der Gruppe (51) mit der G_6

$$(154)\qquad q, xq;\ yq;\ p, xp;\ x^2p + xyq$$

nehmen können, also die G_5

$$(155)\qquad p, q, xq;\ xp, yq.$$

Die B. T.s-Gruppen vom Typ (153) bzw. (155) bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_4$ bzw. $\mathcal{G}_5$.

Jede $\mathcal{G}_6$ enthält ∞^1 gleichberechtigte $\mathcal{G}_5$. Denn die $\mathcal{G}_5$ der affinen $\mathcal{G}_6$ entsprechen den ∞^1 unendlich fernen Punkten, die sämtlich affin ineinander übergeführt werden können.

Zwei Gruppen $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta, \lambda)$, $\mathcal{G}_3(\beta, \alpha, \mu)$ besitzen immer eine G_1 zum Durchschnitt, der mit dem Durchschnitt $[\mathcal{G}_2(\alpha, \beta, \lambda), \mathcal{G}_2(\beta, \alpha, \mu)]$ identisch ist, falls dieser nicht leer ist. Davon überzeugt man sich sofort, wenn man auf die $\mathcal{G}_3(0, \infty)$ (125) und die beiden

invarianten $\mathcal{G}_3(\infty, 0)$ der beiden $\mathcal{G}_6(\infty, 0)$ (53) und (154), d. h. auf

(156) $$x^2p + xyq,\ xyp + y^2q;\ xp + yq,$$

(156̄) $$q,\ xq;\ yq$$

zurückgeht.

Die gemeinsame inf. Trf. $xp + yq$ der Gruppen (125) und (156) ist mit keinen weiteren projektiven inf. Trf. n vertauschbar als mit denen der Gruppe (153); die mit q, der gemeinsamen inf. Trf. der Gruppen (125) und (156̄), vertauschbaren projektiven inf. Trf.n sind linear abgeleitet aus

(157) $$p, q, xq;\ xp,$$

welche eine invariante Untergruppe von (155) erzeugen. Die Gruppen (153) und (157) repräsentieren *verschiedene* Typen von B. T.s-Gruppen, denn ihre zweiten Derivierten [12]) sind

(157̄) (a) $xq, yp, xp - yq$ (b) q.

Die Gruppen vom Typ (157) sollen mit $\bar{\mathcal{G}}_4$ bezeichnet werden.

3. Eine Gruppe $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta, \lambda)$ wird durch ∞^1 Gruppen $\mathcal{G}_2(\beta, \alpha, \mu)$ zu je einem Paare zweiter Klasse ergänzt, da $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$ von ∞^1 Kurven $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ berührt wird. Die ∞^1 Funktionen μ sind natürlich bei gegebenem λ durch integrable Diffgl.n bestimmt, welche außer von λ noch von α, β abhängen und nur die Ableitung nullter Stufe μ willkürlich lassen; d. h. wir haben für μ zwei Diffgl.n 1. Stufe, deren eine dann die erste Gleichung (150) sein muß. Die zweite hat daraufhin die Form

(158) $$\varkappa(\mu_2, \mu, \lambda_2, \lambda; \alpha, \beta, \alpha_1, \ldots) = 0;$$

(158) muß bei der Substitution

(159) $$\mathfrak{S} = (\alpha\beta)\,(\lambda\mu)$$

ungeändert bleiben, denn die Kurven $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$, $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ sind vollkommen gleichberechtigt und (158) besteht für *alle* λ, μ, deren zugeordnete $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$, $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ sich berühren. (158) *ist also die Berührungsbedingung zweier Kurven* $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$, $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$.

Die Formel (158) berechnen wir jetzt aus der Forderung, daß die Gruppen (56) und (149_2) eine G_1 zum Durchschnitt haben. Die G_1 mit der ch. Fu. Q können wir uns definiert denken durch

(160) $$Q_2 = \varrho Q,\quad Q_1 = \bar{\varrho} Q\quad (Q_3 = (\bar{\varrho}_2 - \varrho_1)Q).$$

Soll Q zugleich Lösung von (56) und (149_2) sein, so muß u. a.

(161) $$Q_1 = \alpha Q_2 + \lambda Q,\quad Q_1 = \beta Q_2 + \mu Q$$

sein vermöge (160), d. h.

(162) $$\lambda = \bar{\varrho} - \alpha\varrho,\quad \mu = \bar{\varrho} - \beta\varrho,$$

(163) $$\varrho = \bar{\omega}(\lambda - \mu),\quad \bar{\varrho} = \lambda + \alpha\bar{\omega}(\lambda - \mu) = \bar{\omega}(\beta\lambda - \alpha\mu).$$

Einsetzen von Q in die zweite der Gleichungen (56) liefert

(164) $$\varrho_2 + \varrho^2 = \varrho\gamma + \vartheta.$$

Ausrechnung von (164) ergibt die Gleichung (158). Es ist aber empfehlenswert, zu (164) die aus (149_2) folgende Gleichung

(164′) $$\varrho_2 + \varrho^2 = \varrho\gamma^* + \vartheta^*$$

zu addieren und

(164″) $$2\varrho_2 + 2\varrho^2 = (\gamma + \gamma^*)\varrho + \vartheta + \vartheta^*$$

---

[12]) Die inf. Trf.n $X_1 f, \ldots, X_r f$ mögen eine G_r erzeugen. Dann erzeugen die inf. Trf.n $(X_j X_k)$ $(j, k = 1, \ldots, r)$ eine gewisse Untergruppe von G_r, die sogenannte (*erste*) *Derivierte* zu G_r. Die Derivierte der ersten Derivierten heißt die *zweite* Derivierte von G_r usw.

auszurechnen, wodurch wir von selbst zu einer $\mathfrak{S}$ gegenüber invarianten Relation gelangen. Wir bekommen nach einer kleinen Rechnung vermöge (93), (94a), (150), (151_2):

$$(165)\qquad \mu_2 - \lambda_2 - \bar{\omega}(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2) - (\bar{\beta}\mu - \bar{\alpha}\lambda) + \tfrac{1}{4}(\bar{\beta}_\beta - \bar{\alpha}_\alpha + \omega_{22} + \bar{\beta} - \bar{\alpha}) = 0. \qquad (\alpha, \beta \text{ s. (95)!})$$

4. Die Defgl.n der Durchschnittsgruppe $[\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda),\ \mathcal{G}_6(\beta, \alpha, \mu)]$ sind die Gleichungen (146) + (149_6) für $W = W^* = R$, unter R die ch. Fu. des Durchschnitts verstanden:

$$(166)\qquad \text{(a)}\quad \begin{cases} -R_{11} + \alpha(R_{12} + R_{21}) - \alpha^2 R_{22} + \alpha_1 R_2 - \alpha_2 R_1 - \alpha_3 R = 0, \\ -R_{11} + \beta(R_{12} + R_{21}) - \beta^2 R_{22} + \beta_1 R_2 - \beta_2 R_1 - \beta_3 R = 0, \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{cases} R_{31} - \alpha R_{32} + \lambda R_{21} - \alpha\lambda R_{22} + \lambda_1 R_2 - \lambda_2 R_1 - \lambda_3 R = 0, \\ R_{31} - \beta R_{32} + \mu R_{21} - \beta\mu R_{22} + \mu_1 R_2 - \mu_2 R_1 - \mu_3 R = 0. \end{cases}$$

Nach den Ausführungen in Ziffer **2** dieses Paragraphen wird durch (166) eine $\mathcal{G}_5$ oder eine $\mathcal{G}_4$ definiert, d. h. die allgemeinste Lösung R von (166) hängt von fünf oder vier willkürlichen Konstanten ab, je nachdem λ, μ durch die Berührungsbedingung (165) verknüpft sind oder nicht. Die Relation (165) spielt also — neben (94), (150), (96) — die Rolle einer Int. Bedgg. des Systems (166). Um hier klar zu sehen, gehen wir zurück auf die speziellen Gruppen (155) und (153). Die Defgl.n von (155) sind

$$(167)\qquad R_{11} = 0, \quad R_{22} = 0; \quad R_{211} = 0, \quad R_{122} = 0,$$

aus denen sich alle Ableitungen 3. Stufe bestimmen lassen. Willkürlich bleiben außer R, R_1, R_2 noch zwei Ableitungen 2. Stufe.

Die Defgl.n von (153) dagegen lauten:

$$(168)\qquad R_{22} = 0, \quad R_{11} = 0, \quad R_3 = \frac{1}{xy' - y}(xR_1 - R);$$

aus diesen drei Gleichungen 2. Stufe lassen sich wieder alle Ableitungen 3. Stufe bestimmen, aber auch alle Ableitungen 2. Stufe bis auf eine, die außer R, R_1, R_2 noch willkürlich bleibt. Daraus ist zu ersehen, daß beim Bestehen von (165) das System (166) keine Vereinfachung zuläßt, daß dagegen beim Nicht-Bestehen von (165) die beiden Gleichungen 3. Stufe (166 b) durch eine dritte Gleichung 2. Stufe ersetzt werden können, welche sie nach sich ziehen. Diese Gleichung wollen wir jetzt aufstellen.

Nach Ziffer **2** ist der Durchschnitt $[\mathcal{G}_3(\alpha, \beta, \lambda),\ \mathcal{G}_3(\beta, \alpha, \mu)]$ immer eine G_1; ihre Defgl.n haben wir wieder in der Form (160) anzunehmen. Durch Einsetzen von Q in (127 a) und die erste Gleichung (149_3) gelangen wir wieder zu den Formeln (161) bis (163). Sei nun R die allgemeine ch. Fu. der größten Untergruppe $(\mathcal{G})$ von $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$, deren Trf.n mit den Trf.n der G_1 (160) vertauschbar sind. Dann muß R außer den Gleichungen (45) nur noch der Relation

$$(169)\qquad \{RQ\} = 0$$

genügen. Wenn wir (169) vermöge (160) ausrechnen und den Faktor von Q gleich Null setzen, erhalten wir für die Gruppe $(\mathcal{G})$ folgendes System von Defgl.n:

$$(170)\qquad \text{(a)}\quad \begin{cases} -R_{11} + \alpha(R_{12} + R_{21}) - \alpha^2 R_{22} + \alpha_1 R_2 - \alpha_2 R_1 - \alpha_3 R = 0, \\ -R_{11} + \beta(R_{12} + R_{21}) - \beta^2 R_{22} + \beta_1 R_2 - \beta_2 R_1 - \beta_3 R = 0, \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad R_3 = \varrho R_1 - \bar{\varrho} R_2 + (\bar{\varrho}_2 - \varrho_1) R.$$

Sind die Funktionen λ, μ *nicht* durch (165) verknüpft, dann definiert nach Ziffer **2** das System (170) die

$$\mathcal{G}_4(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = \mathcal{G}_4(\beta, \alpha, \mu, \lambda) = [\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda),\ \mathcal{G}_6(\beta, \alpha, \mu)],$$

d. h. (170) ist das vereinfachte System (166). Erfüllen dagegen λ, μ die Berührungs-

bedingung (165), so definiert (170) die $\overline{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = \overline{\mathcal{G}}_4(\beta, \alpha, \mu, \lambda)$, die eine invariante Untergruppe der durch (166) definierten

$$\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = \mathcal{G}_5(\beta, \alpha, \mu, \lambda) = [\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda),\ \mathcal{G}_6(\beta, \alpha, \mu)]$$

ist. Durch (166) + (165) werden die ∞^1 Untergruppen $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ der $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$ (146) oder der $\mathcal{G}_6(\beta, \alpha, \mu)$ (149_6) bestimmt.

Die bisherigen Ergebnisse dieses Paragraphen können wir zusammenfassen in das Theorem:

Theorem 3. **I.** *Der Durchschnitt zweier $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$, $\mathcal{G}_6(\beta, \alpha, \mu)$ ist entweder eine $\mathcal{G}_4(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ vom Typ* (153) *oder eine $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ vom Typ* (155). *Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn das Gruppenpaar $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta, \lambda)$, $\mathcal{G}_2(\beta, \alpha, \mu)$ eine inf. Trf. gemein hat; notwendig und hinreichend dazu ist, daß λ, μ durch die Berührungsbedingung* (165) *verknüpft sind. Die allgemeine $\mathcal{G}_5$ wird charakterisiert durch* (166), (96), (94), (150) *und* (165). *Ist* (165) *nicht erfüllt, so definiert* (166) *die allgemeine $\mathcal{G}_4$; das System* (166) *kann dann vereinfacht werden zu* (170), *worin ϱ, $\overline{\varrho}$ durch* (163) *erklärt sind.*

II. *Durch* (170) *wird in jedem Falle die größte — viergliedrige — Untergruppe von $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ definiert, deren Trf.n mit den Trf.n der eingliedrigen Durchschnittsgruppe $[\mathcal{G}_3(\alpha, \beta, \lambda),\ \mathcal{G}_3(\beta, \alpha, \mu)]$ vertauschbar sind. Ist* (165) *erfüllt, dann definiert* (170) *die allgemeine $\overline{\mathcal{G}}_4$ vom Typ* (157) *und es ist*

$$[\mathcal{G}_3(\alpha, \beta, \lambda),\ \mathcal{G}_3(\beta, \alpha, \mu)] = [\mathcal{G}_2(\alpha, \beta, \lambda),\ \mathcal{G}_2(\beta, \alpha, \mu)].$$

Die in diesem Paragraphen neu aufgestellten Formeln wollen wir noch spezialisieren für den Fall $\beta = \infty$. Zunächst ist die Berührungsbedingung zu einem Gruppenpaar $\mathcal{G}_2(\alpha, \infty, \lambda)$, $\mathcal{G}_2(\infty, \alpha, \mu')$ anzugeben. Die Defgl.n einer $\mathcal{G}_2(\infty, \alpha, \mu')$ sind aus (121) bis (124) zu entnehmen, wenn darin α, μ' statt β, λ' geschrieben wird. Die Relationen zwischen α, μ' sind:

$$(171)\quad \begin{cases} \mu_2' = -\mu'^2, \\ -\mu_3' = -\mu'\mu_1' - \alpha\mu'^3 + \alpha_2\mu'^2 - \frac{1}{2}\alpha_{22}\mu' + \frac{1}{6}\alpha_{222}, \\ \mu_{11}' = -3\alpha\mu'\mu_1' + \alpha_2\mu_1' - \alpha^2\mu'^3 + (\alpha\alpha_2 - \alpha_1)\mu'^2 \\ \qquad + (-\alpha_3 + \alpha_{21} - \frac{1}{2}\alpha\alpha_{22})\mu' - \frac{1}{3}(-\alpha_{23} + \alpha_{221}) + \frac{1}{6}\alpha\alpha_{222}. \end{cases}$$

Für die Durchschnittsgruppe $[\mathcal{G}_2(\alpha, \infty, \lambda), \mathcal{G}_2(\infty, \alpha, \mu')]$ haben wir wieder die Gleichungen (160), während an die Stelle von (162), (163) die Gleichungen

$$(172)\qquad \lambda = \overline{\varrho} - \alpha\varrho,\ \mu' = \varrho; \quad \overline{\varrho} = \alpha\mu' + \lambda,\ \varrho = \mu'$$

treten. Indem wir Q in die dritte Gleichung (73) einsetzen, bekommen wir vermöge (160), (172), (75), (77) die Berührungsbedingung

$$(173)\qquad \mu_1' + \lambda_2 + \alpha\mu'^2 - \lambda\mu' - \alpha_2\mu' + \tfrac{1}{2}\alpha_{22} = 0.$$

Man erkennt ferner ohne Mühe, daß an die Stelle der Relationen (166) und (170) die folgenden treten müssen:

$$(174)\quad \begin{cases} -R_{11} + \alpha(R_{12} + R_{21}) - \alpha^2 R_{22} + \alpha_1 R_2 - \alpha_2 R_1 - \alpha_3 R = 0, \\ R_{22} = 0, \\ R_{31} - \alpha R_{32} + \lambda R_{21} - \alpha\lambda R_{22} + \lambda_1 R_2 - \lambda_2 R_1 - \lambda_3 R = 0, \\ -R_{32} + \mu' R_{12} + \mu_2' R_1 - \mu_1' R_2 + \mu_3' R = 0. \end{cases}$$

$$(175)\quad \begin{cases} -R_{11} + \alpha(R_{12} + R_{21}) - \alpha^2 R_{22} + \alpha_1 R_2 - \alpha_2 R_1 - \alpha_3 R = 0, \\ R_{22} = 0, \\ R_3 = \varrho R_1 - \overline{\varrho} R_2 + (\overline{\varrho}_2 - \varrho_1) R. \end{cases}$$

In (175) sind ϱ, $\overline{\varrho}$ durch (172) erklärt. Das System (174) besteht aus den Gleichungen (147) und (148), wobei in (148) α, μ' statt β, λ' zu denken ist. Die dritte Gleichung (175) ist wieder formal die Gleichung (170 b), da sie ja nur die Folge von (160) und (169)

allein ist. (174) + (173) definiert also die $\mathcal{G}_5(\alpha, \infty, \lambda, \mu')$, (175) *ohne* (173) die $\mathcal{G}_4(\alpha, \infty, \lambda, \mu')$, (175) + (173) die $\overline{\mathcal{G}}_4(\alpha, \infty, \lambda, \mu')$.

Zum Schluß zeigen wir noch, *daß die durch* (170) *definierte* $\mathcal{G}_4$ *oder* $\overline{\mathcal{G}}_4$ *außer* $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ *keine weitere gewöhnliche Diffgl. 2. O. invariant läßt.* Denn wäre auch $y'' + \varepsilon = 0$ invariant, so gäbe es drei Gleichungen

$$\begin{aligned} -R_{11} + \alpha(R_{12} + R_{21}) - \alpha^2 R_{22} + \cdots &= 0, \\ -R_{11} + \beta(R_{12} + R_{21}) - \beta^2 R_{22} + \cdots &= 0, \\ -R_{11} + \varepsilon(R_{12} + R_{21}) - \varepsilon^2 R_{22} + \cdots &= 0. \end{aligned}$$

Wäre nun die Determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & \alpha & -\alpha^2 \\ -1 & \beta & -\beta^2 \\ -1 & \varepsilon & -\varepsilon^2 \end{vmatrix} = \pm (\beta - \alpha)(\varepsilon - \beta)(\varepsilon - \alpha)$$

von Null verschieden, dann könnten wir aus den vorstehenden Gleichungen die Größen $R_{11}, R_{22}, R_{12} + R_{21}$ durch R, R_1, R_2 ausdrücken, so daß bei Hinzunahme von (170 b) alle Ableitungen 2. Stufe von R bestimmt wären. Da dies jedoch unmöglich ist, muß die erwähnte Determinante verschwinden, d. h. es muß $\varepsilon = \alpha$ oder $\varepsilon = \beta$ sein.

5. Eine Gerade $\mathfrak{G}_0$ der Ebene wird in einem ihrer Punkte $\mathfrak{P}_0$ von ∞^3 *Kegelschnitten berührt.* Legen wir $\mathfrak{G}_0$ ins Unendliche und $\mathfrak{P}_0$ in den unendlich fernen Punkt der Y-Achse, so bekommen wir die ∞^3 *Parabeln*, deren Achsen zur Y-Achse parallel sind und deren Gleichungen

$$y = a + bx + cx^2 \tag{176}$$

die Lösungskurven der Diffgl. 3. O.

$$y''' = 0 \tag{177}$$

darstellen.

Die größte projektive Gruppe, die von der Diffgl. (177) gestattet wird, ist zugleich die größte projektive Gruppe, welche die unendlich ferne Gerade und den unendlich fernen Punkt der Y-Achse in Ruhe läßt, also die Gruppe (155); denn die projektiven Trf.n, welche die Parabeln (176) untereinander vertauschen, müssen deren gemeinsames unendlich fernes Linienelement invariant lassen. Außer (177) läßt die Gruppe (155) keine weitere Diffgl. 3. O. invariant; daher kann (177) aus den dreimal erweiterten inf. Trf.n (155) durch Determinantenbildung gewonnen werden (s. Satz 14). Also gehört auch zur allgemeinen $\mathcal{G}_5$ *eine* invariante Diffgl. 3. O., die wir nach Satz 13 aus den Defgl.n (166) durch Determinantenbildung herleiten können. Praktischer ist jedoch folgender Weg.

Die Diffgl. $\mathfrak{y}''' = 0$ läßt sich so schreiben: $\dfrac{d\mathfrak{y}''}{d\mathfrak{x}} = 0$. Nun ist vermöge der B. T. (6)

$$\mathfrak{y}'' = \frac{d\mathfrak{y}'}{d\mathfrak{x}} = \frac{dP}{dX} = \frac{P_2 y'' + P_1}{X_2 y'' + X_1},$$

also mit den Bezeichnungen (44′)

$$\mathfrak{y}'' = J^{(2)} = \frac{\nu(y'' + \alpha)}{y'' + \beta} \qquad \left(\nu = \frac{P_2}{X_2}\right). \tag{178}$$

Da allgemein

$$\frac{df}{d\mathfrak{x}} = \frac{1}{X_2 y'' + X_1} \frac{df}{dx},$$

so verwandelt sich $\mathfrak{y}''' = \dfrac{d\mathfrak{y}''}{d\mathfrak{x}} = 0$ durch die B. T. (6) wegen (178) in die Diffgl.

$$\frac{dJ^{(2)}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\nu(y'' + \alpha)}{y'' + \beta}\right) = 0, \tag{179}$$

die ausgerechnet lautet:

$$(180)\quad \begin{cases} y''' + \bar{\omega}\frac{\nu_2}{\nu}y''^3 + \bar{\omega}\left(\frac{\nu_1}{\nu} + (\alpha+\beta)\frac{\nu_2}{\nu} - \omega_2\right)y''^2 \\ \quad + \bar{\omega}\left((\alpha+\beta)\frac{\nu_1}{\nu} + \alpha\beta\frac{\nu_2}{\nu} - \omega_1 + \beta\alpha_2 - \alpha\beta_2\right)y'' \\ \quad + \bar{\omega}\left(\alpha\beta\frac{\nu_1}{\nu} + \beta\alpha_1 - \alpha\beta_1\right) = 0. \end{cases}$$

(180) ist also die invariante Diffgl. 3. O. der $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$, in welche die Gruppe

$$(\overline{180})\qquad \mathfrak{p},\ \mathfrak{q},\ \xi\mathfrak{p},\ \xi\mathfrak{q},\ \eta\mathfrak{q}$$

vermöge (6) übergeht. In (180) tritt ν nur in den beiden Verbindungen $\frac{\nu_1}{\nu}, \frac{\nu_2}{\nu}$ auf, die sich natürlich durch $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ ausdrücken lassen müssen. Das geschieht folgendermaßen.

η'' ist Differentialinvariante der beiden Gruppen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}, \xi\mathfrak{q}$, also der beiden $\mathcal{G}_2(0, \infty)$, $\mathcal{G}_2(\infty, 0)$, welche die zu $\frac{d\eta''}{d\xi} = 0$ gehörige $\mathcal{G}_5(0, \infty)$ $(\overline{180})$ bestimmen. Daher ist $J^{(2)}$ Differentialinvariante der beiden Gruppen $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta, \lambda)$, $\mathcal{G}_2(\beta, \alpha, \mu)$. Die Bedingung $\frac{\delta J^{(2)}}{\delta t} = 0$ gibt ausgerechnet:

$$(181)\quad (y''+\alpha)(y''+\beta)\frac{\delta\nu}{\delta t} + \omega\nu\frac{\delta y''}{\delta t} + \nu\left((y''+\beta)\frac{\delta\alpha}{\delta t} - (y''+\alpha)\frac{\delta\beta}{\delta t}\right) = 0,$$

oder wegen (16) und (39):

$$(181')\quad \begin{cases} (\nu_1 U_2 - \nu_2 U_1 - \nu_3 U)(y''+\alpha)(y''+\beta) \\ \quad + \omega\nu(-U_{11} - (U_{12}+U_{21})y'' - U_{22}y''^2) \\ \quad + \nu((y''+\beta)(\alpha_1 U_2 - \alpha_2 U_1 - \alpha_3 U) \\ \quad - (y''+\alpha)(\beta_1 U_2 - \beta_2 U_1 - \beta_3 U)) = 0. \end{cases}$$

In (181′) müssen die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von y'' verschwinden. Nullsetzen des Koeffizienten von y''^2 liefert

$$(182)\qquad \nu_1 U_2 - \nu_2 U_1 - \nu_3 U - \omega\nu U_{22} = 0.$$

(182) muß eine Folge sowohl von (56) als auch von (149_2) sein. Nullsetzen des Koeffizienten von U_2 liefert schließlich die gesuchten Relationen:

$$\frac{\nu_1}{\nu} - \alpha\frac{\nu_2}{\nu} - \omega\gamma = 0, \qquad \frac{\nu_1}{\nu} - \beta\frac{\nu_2}{\nu} - \omega\gamma^* = 0,$$

$$(183)\qquad \frac{\nu_2}{\nu} = \gamma - \gamma^*, \qquad \frac{\nu_1}{\nu} = \beta\gamma - \alpha\gamma^*.$$

Setzen wir die aus (183) folgenden Ausdrücke

$$(184)\quad \frac{\nu_2}{\nu} = 3\bar{\omega}(\lambda+\mu) + \bar{\beta} - \bar{\alpha}, \qquad \frac{\nu_1}{\nu} = 3\bar{\omega}(\beta\lambda + \alpha\mu) + \alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha}$$

in (180) ein, so bekommen wir vermöge (93 b) und der entsprechenden Formel für $\bar{\beta}$ nach einiger Rechnung:

$$(185)\quad \begin{gathered} y''' + Ay''^3 + By''^2 + Cy'' + D = 0; \\ A = \frac{3}{\omega^2}(\lambda+\mu) + \frac{1}{\omega^3}(2\omega_1 + 3(\beta\alpha_2 - \alpha\beta_2) + \beta\beta_2 - \alpha\alpha_2) \\ B = \frac{3}{\omega^2}((2\beta+\alpha)\lambda + (2\alpha+\beta)\mu) + \frac{3}{\omega^3}((\alpha+\beta)\omega_1 + 2(\beta^2\alpha_2 - \alpha^2\beta_2)) \\ C = \frac{3}{\omega^2}(\beta(2\alpha+\beta)\lambda + \alpha(2\beta+\alpha)\mu) + \frac{3}{\omega^3}(2\alpha\beta\omega_1 + (\alpha+\beta)(\beta^2\alpha_2 - \alpha^2\beta_2)) \\ D = \frac{3\alpha\beta}{\omega^2}(\beta\lambda + \alpha\mu) + \frac{1}{\omega^3}(\beta^3\alpha_1 - \alpha^3\beta_1 + 3\alpha\beta(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) + 2\alpha\beta(\beta^2\alpha_2 - \alpha^2\beta_2)) \end{gathered}$$

Die Ausdrücke für $A, \ldots, D$ sind, wie nicht anders zu erwarten, in bezug auf die Substitution (159) symmetrisch. λ, μ erfüllen natürlich die Berührungsbedingung (165). Wir wollen das Ergebnis noch einmal als Theorem formulieren:

Theorem 4. *Die invariante Diffgl. 3. O. der $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ (166) wird durch (185) repräsentiert. Eine B. T., die $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ in (155) transformiert, bringt die Diffgl. (185) auf die Form $y''' = 0$.*

Die invariante Diffgl. 3. O. der $\mathcal{G}_5(\alpha, \infty, \lambda, \mu')$ (174) erhalten wir am einfachsten aus (185), indem wir $\beta = \frac{1}{\beta'}$, $\mu = -\frac{\mu'}{\beta'}$ einführen und $\beta' \to 0$ streben lassen. Dann ergibt sich die Diffgl.

$$(186)\quad \begin{cases} y''' + By''^2 + Cy'' + D = 0, \\ B = -3\mu', \quad C = 3\lambda - 6\alpha\mu' + 3\alpha_2, \quad D = 3\alpha\lambda - 3\alpha^2\mu' + \alpha_1 + 2\alpha\alpha_2. \end{cases}$$

λ, μ' genügen jetzt der Bedingung (173).

Bezeichnen wir die Kurven, in welche die *Kegelschnitte* bei der Transformation von $\mathcal{G}_8(0, \infty)$ in $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ übergehen, mit $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$, so können wir sagen: *Die Diffgl.* (185) *bestimmt die ∞^3 $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$, welche die beiden Kurven $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$, $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ in deren Berührungspunkt berühren.* Die allgemeine Diffgl. (185) enthält — entsprechend der Tatsache, daß in jeder $\mathcal{G}_8$ ∞^3 $\mathcal{G}_5$ stecken — drei wesentliche Parameter, nämlich die drei Integrationskonstanten der Diffgl.n (94), (150), (165). Diese drei Parameter gehen mit den drei Integrationskonstanten der Diffgl. (185) in *fünf Verbindungen* in die allgemeine Lösung von (185) ein, denn der Inbegriff aller Lösungskurven der ∞^3 Diffgl.n (185) ist ja die Schar der ∞^5 $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$. Es muß daher möglich sein, durch zweimalige Differentiation von (185) unter Berücksichtigung von (94), (150), (165) λ und μ zu eliminieren und so die gegenüber $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ invariante Diffgl. 5. O. aufzustellen, die aus der Diffgl. der Kegelschnitte durch die allgemeinste B. T. hervorgeht. Hierbei wird man davon ausgehen, daß eine $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$ eine einzige Diffgl. 4. O. invariant läßt, die der Diffgl.

$$(187)\qquad 3y''y^{IV} - 5y'''^2 = 0$$

der ∞^4 Parabeln entspricht, welche die affine $\mathcal{G}_6$ gestattet. Man wird daher zunächst durch einmalige Differentiation von (185) und Elimination von μ mit Hilfe der Relationen (150), (165) zur invarianten Diffgl. 4. O. der $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$ vorschreiten. Bei nochmaliger Differentiation muß dann auch λ und λ_2 eliminiert werden können. Der direkten Ausführung dieses Gedankenganges [13]) stellt sich jedoch ein undurchdringliches Gestrüpp von Rechnungen entgegen, denn die immerhin noch angebbare Diffgl. 4. O. ist schon ein kleines Monstrum.

§ 7. Die fünfgliedrige Derivierte der allgemeinen $\mathcal{G}_6$.

1. Die Betrachtung der allgemeinsten B. T.s-Gruppe vom Typ der affinen $\mathcal{G}_6$ wäre unvollständig ohne die Charakterisierung ihrer fünfgliedrigen *Derivierten* — wir schreiben für sie $\tilde{\mathcal{G}}_5$ —, also der mit

$$(188)\qquad p, q;\ yp, xq, xp - yq$$

durch die allgemeinste B. T. ähnlichen Gruppe. Die Gruppe (188) ist ebenso wie (31) und (51) *primitiv*, und jede primitive Gruppe von P. T.n der Ebene ist durch P. T. mit einer dieser drei Gruppen ähnlich. Verstehen wir unter $\widetilde{W}$ die allgemeine ch. Fu. der Gruppe (188), so sind die Defgl.n für $\widetilde{W}$ drei Gleichungen 2. Stufe:

$$(189)\qquad \widetilde{W}_{11} = 0, \quad \widetilde{W}_{22} = 0, \quad 2\widetilde{W}_{21} - \widetilde{W}_{12} = 0.$$

[13]) Er findet sich bereits in: F. Engel, Bestimmung der Differentialinvarianten von Gruppen der Ebene aus den Definitionsgleichungen, Berichte der math.-phys. Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig **74** (1922).

Willkürlich bleiben die fünf Ableitungen $\widetilde{W}$, $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_2$ und z. B. $\widetilde{W}_{21}$, $\widetilde{W}_{212}$. Daher wird auch die allgemeine $\tilde{\mathcal{G}}_5$ durch drei Gleichungen 2. Stufe definiert, von denen wir die beiden Gleichungen (146 a) sofort angeben können, während wir uns die dritte in der Form

$$2\widetilde{W}_{21} - \widetilde{W}_{12} = \sigma_{00}\widetilde{W}_{22} + \sigma_0\widetilde{W}_1 + \sigma\widetilde{W}_2 + \tau\widetilde{W} \tag{190}$$

geschrieben denken dürfen. In dem System der Defgl.n für die allgemeine $\tilde{\mathcal{G}}_5$ sind nämlich $\widetilde{W}$, $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_2$, $\widetilde{W}_{22}$, $\widetilde{W}_{222}$ als willkürlich zu betrachten, da die Gleichungen (146 a) bei vorausgesetzter Endlichkeit von α, β ohne spezielle Annahmen nur nach W_{11} und $W_{12} + W_{21}$ auflösbar sind.

Um in (190) die Koeffizienten zu bestimmen, leiten wir zunächst aus (146) die Formel

$$\begin{aligned} 2W_{212} - W_{122} = \alpha W_{222} &+ \frac{1}{\omega^2}(3\omega\lambda + \omega_1 + 2\omega\alpha_2 - \alpha\omega_2)W_{21} \\ &+ \frac{1}{\omega^2}(-3\alpha\omega\lambda - \beta\omega_1 + \alpha\beta\omega_2 - 2\alpha\omega\alpha_2)W_{22} + \cdots \end{aligned} \tag{191}$$

her; die Punkte deuten Glieder mit W_1, W_2, W an. Ferner bekommen wir durch Anwendung der Operation ∂_2 auf (190):

$$2\widetilde{W}_{212} - \widetilde{W}_{122} = \sigma_{00}\widetilde{W}_{222} + \sigma_0\widetilde{W}_{12} + (\sigma_{002} + \sigma)\widetilde{W}_{22} + \cdots. \tag{192}$$

Ersetzen wir in (191) W durch $\widetilde{W}$, so liefert der Vergleich der Koeffizienten von $\widetilde{W}_{222}$ in (191) und (192)

$$\sigma_{00} = \alpha. \tag{193}$$

Drücken wir unter Berücksichtigung von (193) in (191) und (192) $\widetilde{W}_{21}$ und $\widetilde{W}_{12}$ vermöge (190) und (146 a) durch $\widetilde{W}_{22}$ und die niedrigeren Ableitungen von $\widetilde{W}$ aus, so ergibt Gleichsetzung der Koeffizienten von $\widetilde{W}_{22}$ in den beiden resultierenden Ausdrücken für $2\widetilde{W}_{212} - \widetilde{W}_{122}$

$$\sigma + \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta)\sigma_0 = \lambda - \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{2}{3\omega}(-\omega_1 + \alpha\omega_2). \tag{194}$$

Jetzt machen wir Gebrauch von der Tatsache, daß in unserer $\tilde{\mathcal{G}}_5$ die $\mathcal{G}_2(\alpha, \beta)$ (56) als Untergruppe steckt. Durch Einsetzen von U in (190) folgt vermöge (56) und (85):

$$\sigma + \alpha\sigma_0 = 3\lambda + \alpha_2, \tag{195}$$

$$\tau = 2(\bar{\vartheta} - \alpha\vartheta) - \lambda_2 - \lambda\sigma_0. \tag{195'}$$

(194) und (195) zusammen liefern (s. (93 a, b))

$$\sigma_0 = -3\bar{\omega}\lambda + \bar{\alpha} = -\gamma. \tag{196}$$

Ausrechnung von (195) und (195') mit Hilfe von (196), (86), (94 a) gibt

$$\begin{aligned} \sigma &= 3(1 + \alpha\bar{\omega})\,\lambda - \alpha\bar{\alpha} + \alpha_2, \\ \tau &= 3(-\lambda_2 - \bar{\omega}\lambda^2 + \bar{\alpha}\lambda) - \bar{\bar{\alpha}} - \bar{\alpha}_\alpha - \alpha_{22}. \end{aligned} \tag{197}$$

($\bar{\alpha}$ ist in (95) erklärt). Wir können also als Defgl.n für die $\tilde{\mathcal{G}}_5$ hinschreiben:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \begin{cases} -\widetilde{W}_{11} + \alpha(\widetilde{W}_{12} + \widetilde{W}_{21}) - \alpha^2\widetilde{W}_{22} + \alpha_1\widetilde{W}_2 - \alpha_2\widetilde{W}_1 - \alpha_3\widetilde{W} = 0, \\ -\widetilde{W}_{11} + \beta(\widetilde{W}_{12} + \widetilde{W}_{21}) - \beta^2\widetilde{W}_{22} + \beta_1\widetilde{W}_2 - \beta_2\widetilde{W}_1 - \beta_3\widetilde{W} = 0, \end{cases} \\ &\text{(b)} \quad 2\widetilde{W}_{21} - \widetilde{W}_{12} = \alpha\widetilde{W}_{22} - \gamma\widetilde{W}_1 + \sigma\widetilde{W}_2 + \tau\widetilde{W}. \end{aligned} \tag{198}$$

Satz 18. *Die fünfgliedrige — mit* (188) *ähnliche — Derivierte $\tilde{\mathcal{G}}_5(\alpha, \beta, \lambda)$ der durch* (146) *definierten $\mathcal{G}_6$ ist durch* (198), (197), (93 a) *charakterisiert.*

Im System (198) läßt sich der Grenzübergang $\beta \to \infty$ ohne weiteres vollziehen;

von der Gleichung (198 b) bleibt dabei übrig:

$$2\widetilde{W}_{21} - \widetilde{W}_{12} = (3\lambda + \alpha_2)\,\widetilde{W}_2 - (3\lambda_2 + \alpha_{22})\widetilde{W}. \tag{199}$$

Gehen wir dagegen nach Anwendung der Substitution (119) auf (198 b) mit α zur Grenze ∞, so resultiert die Gleichung

$$2\widetilde{W}_{12} - \widetilde{W}_{21} = -\gamma'\widetilde{W}_2 + \sigma'\widetilde{W}_1 + \tau'\widetilde{W}, \tag{200}$$

worin γ' aus (122) zu entnehmen ist und

$$\sigma' = 3\lambda',\ \tau' = 3(-\lambda_1' - \beta\lambda'^2 + \beta_2\lambda') - \beta_{22}. \tag{200'}$$

2. Betrachten wir nun die *Durchschnittsgruppe* zweier in bezug auf $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ dualistischer $\widetilde{\mathcal{G}}_5(\alpha, \beta, \lambda)$, $\widetilde{\mathcal{G}}_5(\beta, \alpha, \mu)$. Ihre Defgl.n für ihre allgemeine ch. Fu. M lauten unter Benutzung der Sternsymbolik:

$$\begin{cases} -M_{11} + \alpha(M_{12} + M_{21}) - \alpha^2 M_{22} + \alpha_1 M_2 - \alpha_2 M_1 - \alpha_3 M = 0, \\ -M_{11} + \beta(M_{12} + M_{21}) - \beta^2 M_{22} + \beta_1 M_2 - \beta_2 M_1 - \beta_3 M = 0, \\ 2M_{21} - M_{12} = \alpha M_{22} - \gamma M_1 + \sigma M_2 + \tau M, \\ 2M_{21} - M_{12} = \beta M_{22} - \gamma^* M_1 + \sigma^* M_2 + \tau^* M. \end{cases} \tag{201}$$

Hierbei ist zu vermuten, daß die Gruppe (201) dreigliedrig ist, weil durch (201) alle Ableitungen 2. Stufe von M bestimmt sind. Ferner ist zu erwarten, daß durch (201) zwei verschiedene Gruppentypen definiert werden, je nachdem die Bedingung (165) erfüllt ist oder nicht.

Betrachten wir die Verhältnisse bei der projektiven $\mathcal{G}_8$. Die Derivierte der $\mathcal{G}_6$ (53) ist:

$$xp - yq,\ yp,\ xq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q. \tag{202}$$

Ihr Durchschnitt mit (188) ist die G_3

$$xp - yq,\ yp,\ xq, \tag{203}$$

die Derivierte der Gruppe (153). Die Derivierte der $\mathcal{G}_6$ (154) ist erzeugt von

$$p,\ q,\ xq,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq; \tag{204}$$

sie bildet mit (188) den Durchschnitt

$$p,\ q,\ xq. \tag{205}$$

Dies ist die Derivierte der fünfgliedrigen Gruppe (155) sowie der viergliedrigen (157). Die drei G_3 (125), (203), (205) sind *nicht* ähnlich durch B. T., denn als ihre Derivierten findet man die Gruppen

$$p, q;\quad yp, xq, xp - yq;\quad q.$$

Somit haben wir den

Satz 19. *Durch* (201) *werden zwei dreigliedrige Gruppen von verschiedenem Typus definiert, wenn die Bedingung* (165) *erfüllt oder nicht erfüllt ist. Im ersten Falle ist die dargestellte G_3 die Derivierte sowohl der $\mathcal{G}_5$* (166) *als auch deren invarianter Untergruppe $\overline{\mathcal{G}}_4$* (170), *und die G_3 ist ähnlich mit* (205). *Im zweiten Falle definiert* (201) *die mit* (203) *ähnliche Derivierte der $\mathcal{G}_4$* (170). *In beiden Fällen ist* (201) *die Durchschnittsgruppe* $[\widetilde{\mathcal{G}}_5(\alpha, \beta, \lambda), \widetilde{\mathcal{G}}_5(\beta, \alpha, \mu)]$.

Mit Hilfe des Prinzips der *Durchschnittsbildung* lassen sich noch für eine Reihe von anderen Untergruppen der $\mathcal{G}_8$ die Defgl.n angeben, worauf wir jedoch hier nicht weiter eingehen wollen.

Eingegangen 29. November 1934.

Die infinitesimalen Verbiegungen der Kugel.

Von *Eduard Rembs* in Berlin.

Im folgenden werden Formeln für die Zusatzgrößen der Kugelkoordinaten bei infinitesimaler Verbiegung abgeleitet, die zwar nur wenig von denen bei Darboux [1]) abweichen, aber durch die einfache kinematische Bedeutung der auftretenden willkürlichen Funktionen bemerkenswert sind. Da die bei infinitesimaler Verbiegung der Kugel assoziierten Flächen (die Drehrisse) Minimalflächen sind, gewinnen wir zugleich eine Deutung für die in der integralfreien Darstellung der Minimalflächen von Weierstraß [2]) (bezw. einer äquivalenten) auftretende willkürliche Funktion, eine Deutung, die auf die zugehörige Kugelverbiegung Bezug nimmt. Zugleich wird auf den Zusammenhang mit der Potentialtheorie hingewiesen. Insbesondere zeigt sich, daß Liebmanns Gleitverbiegungen [3]) auf einen besonders einfachen Fall der 3. Randwertaufgabe für einen kreisförmigen Bereich hinauskommen.

Wir denken uns die Einheitskugel vom Südpol stereographisch auf die Äquatorebene projiziert und auf rechtwinklige Koordinaten ξ, η in dieser als Parameter bezogen:

$$(1) \qquad x = \frac{2\xi}{N},\ y = \frac{2\eta}{N},\ z = \frac{2}{N} - 1,\ N = 1 + \xi^2 + \eta^2.$$

Bei einer infinitesimalen Verbiegung gehe sie über in:

$$(2) \qquad x_1 = x + \varepsilon X,\ y_1 = y + \varepsilon Y,\ z_1 = z + \varepsilon Z,$$

wo X, Y, Z Funktionen von ξ, η bedeuten. Die Änderungen, die dabei die geographischen Längen und die Halbmesser der Breitenkreise erfahren, erhält man, indem man in $\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}$ bezw. $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ die Glieder erster Ordnung in ε bestimmt; sie lauten, von dem Faktor ε abgesehen:

$$(3) \qquad V = \frac{xY - yX}{x^2 + y^2},\quad R = \frac{xX + yY}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Wir führen noch die folgende Funktion ein:

$$(4) \qquad U = \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und bemerken, daß sich damit X und Y folgendermaßen darstellen lassen:

$$(5) \qquad X = Ux - Vy,\ Y = Uy + Vx.$$

Nun ist aber

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

---

[1]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces **4** (1896), S. 17 und S. 99.

[2]) Vgl. z. B. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie **1** (1930), S. 238.

[3]) H. Liebmann, Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen, Münchener Berichte 1920, S. 21—48.

und daher

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0; \tag{6}$$

es liegt daher nahe, Z in der Form anzusetzen:

$$Z = Uz + W, \tag{7}$$

wo W eine noch näher zu bestimmende Funktion sei. An Stelle von X, Y, Z bestimmen wir nun U, V, W.

Die Isometriebedingung lautet:

$$dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ = 0 \tag{8}$$

und erhält wegen (6) die Gestalt:

$$U(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dV(x\,dy - y\,dx) + dW\,dz = 0. \tag{9}$$

Aus (1) ergibt sich:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{4}{N^2}(d\xi^2 + d\eta^2),$$

$$x\,dy - y\,dx = \frac{4}{N^2}(\xi\,d\eta - \eta\,d\xi),$$

$$dz = -\frac{4}{N^2}(\xi\,d\xi + \eta\,d\eta).$$

Setzt man dies in (9) ein und beachtet, daß die entstehende Differentialform für alle Werte $d\xi$, $d\eta$ verschwinden muß, so erhält man drei Gleichungen für U, V, W:

$$U = \xi\frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial V}{\partial \xi} = \eta\frac{\partial W}{\partial \eta} - \xi\frac{\partial V}{\partial \eta}, \tag{10}$$

$$\xi\left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \eta}\right) - \eta\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\right) = 0. \tag{11}$$

Aus (10) folgert man noch:

$$\eta\left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \eta}\right) + \xi\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\right) = 0,$$

was mit (11) zusammen ergibt:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = -\frac{\partial W}{\partial \xi}. \tag{12}$$

V und W als Funktionen von ξ, η genügen also den Cauchy-Riemannschen Gleichungen.

Für V bemerken wir besonders:

Projiziert man die Kugel aus einem Pol stereographisch in die Äquatorebene und bezieht die Kugel auf rechtwinklige Koordinaten in dieser Ebene als Parameter, so genügt die Änderung, die die geographische Länge bei infinitesimaler Verbiegung der Kugel erfährt, der Laplaceschen Gleichung.

Für U erhält man nun aus (10) den Wert:

$$U = \xi\frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial W}{\partial \eta} \tag{13}$$

oder, wenn

$$\xi = \varrho\cos\varphi, \quad \eta = \varrho\sin\varphi$$

gesetzt wird,

$$U = \varrho\frac{\partial W}{\partial \varrho}.$$

Wegen (5), (7) kommen wir also zu dem Ergebnis:

Die Zusatzgrößen bei infinitesimaler Kugelverbiegung erhält man aus den Gleichungen:

$$(14)\qquad \begin{cases} X = \varrho \dfrac{\partial W}{\partial \varrho}\, x - Vy \\ Y = \varrho \dfrac{\partial W}{\partial \varrho}\, y + Vx \\ Z = \varrho \dfrac{\partial W}{\partial \varrho}\, z + W\,; \end{cases}$$

darin bedeuten V und W beliebige konjugierte Potentialfunktionen von ξ, η, und es ist $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Bekanntlich läßt die Kugel keine Infinitesimalverbiegung als Ganzes zu; das kommt ersichtlich darauf hinaus, daß eine in der ganzen Ebene mit Einschluß des Unendlichen reguläre analytische Funktion $V + iW$ notwendig eine Konstante ist. Nach Liebmann besteht die Möglichkeit der infinitesimalen Verbiegung, wenn ein etwa einen Pol umschließendes, noch so kleines Stück der Kugeloberfläche ausgeschnitten wird. Den Liebmannschen Verbiegungen entsprechen offenbar die *ganzen* analytischen Funktionen $V + iW$ von $\xi + i\eta$, und man sieht, daß auch die Aufgabe der Kugelverbiegungen mit einer größeren Anzahl vorgeschriebener singulärer Stellen in der Funktionentheorie ihr Analogon hat. Alle eindeutigen analytischen Funktionen mit denselben singulären Stellen liefern Verbiegungen der gewünschten Art.

Liebmanns Gleitverbiegungen sind solche Verbiegungen einer etwa von einem Breitenkreis begrenzten Kalotte, bei denen der Rand eben bleibt. Sie lauten in unserer Darstellung

$$V + iW = (\xi + i\eta)^n,$$

wo n eine ganze Zahl > 1 bedeutet. In der Tat ist dann:

$$\varrho \frac{\partial W}{\partial \varrho} = \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} = nW,$$

denn W ist homogen von der Ordnung n. Die dritte Gleichung (14) lautet daher hier:

$$Z = nWz + W.$$

Für infinitesimale Gleitverbiegungen muß am Rande $Z = 0$ sein; das ist offenbar für den Breitenkreis $z = -\dfrac{1}{n}$ der Fall. Nun ist nach (1):

$$z = \frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2}.$$

Die Liebmannschen Gleitverbiegungen lösen also die Aufgabe, *die im ganzen Innern eines Kreises mit dem Radius ϱ reguläre Potentialfunktion W so zu bestimmen, daß die Randbedingung*

$$\frac{\partial W}{\partial \varrho} : W = \frac{\varrho^2 + 1}{\varrho(\varrho^2 - 1)}$$

erfüllt ist. Aber nur für Ränder $z = -\dfrac{1}{n}$, d. h. für Kreise mit dem Halbmesser

$$\varrho = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$$

ist die Aufgabe lösbar. Die so bestimmten Kalotten lassen nicht nur infinitesimale Gleitverbiegungen zu, sondern auch Gleitverbiegungen 2. Stufe, aber keine 3. Stufe. Den Beweis dafür werde ich an anderer Stelle erbringen. Damit ist zugleich der Nachweis

erbracht, daß endliche Gleitverbiegungen von Kugelkalotten unmöglich sind. Das Gleitverbiegungsproblem bei der Kugel ist daher als ein *Problem* 3. *Stufe* zu bezeichnen. Ein Verbiegungsproblem 2. Stufe habe ich bereits behandelt [4]). Die bekannte Unverbiegbarkeit der Eiflächen ist von der 1. Stufe, d. h. schon die infinitesimalen Verbiegungen entscheiden dabei über die Verbiegbarkeit und zwar im negativen Sinne.

Den zur infinitesimalen Verbiegung (14) gehörigen Drehriß $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ erhält man aus (14) mittels der Gleichungen:

$$\begin{aligned} dX &= \mathfrak{y}\,dz - \mathfrak{z}\,dy, \\ dY &= \mathfrak{z}\,dx - \mathfrak{x}\,dz, \\ dZ &= \mathfrak{x}\,dy - \mathfrak{y}\,dx. \end{aligned}$$

Er ist eine Minimalfläche und der betreffenden Verbiegung zugeordnet. *Wir erhalten so eine allgemeine Darstellung der Minimalflächen mittels der Potentialfunktion V und ihrer ersten und zweiten Ableitungen.* W selbst tritt nämlich nicht auf, und seine Ableitungen lassen sich wegen (12) durch die von V ersetzen. Wir schreiben die Gleichungen nicht auf; genau dieselbe Darstellung erhält man nämlich bequemer auf folgende Art: Man ersetze in den Weierstraßschen Formeln (vgl. die 2. Fußnote) die Funktion $f(t)$ durch $itf(t)$. Sie lauten dann:

$$(15) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \Re\left\{f' + \dfrac{t(1-t^2)}{2} f''\right\}, \\ \mathfrak{y} = \Re i\left\{f' + \dfrac{t(1+t^2)}{2} f''\right\}, \\ \mathfrak{z} = \Re\,\{f - tf' - t^2 f''\}. \end{cases}$$

Setzt man hier

$$t = \xi + i\eta,\ f = V + iW$$

und drückt mittels (12) alle Ableitungen von W durch die von V aus so erhält man genau die eben genannten Drehrißformeln. *In der allgemeinen Darstellung* (15) *der Minimalflächen, die sich auch mit Hilfe der Potentialfunktion $V = \Re(f)$ und ihren ersten und zweiten Ableitungen allein schreiben läßt, bedeutet also $\Re(f)$ die Änderung, die die geographische Länge der Kugel bei der zugehörigen infinitesimalen Verbiegung erfährt* [5]).

Dabei ist Zugehörigkeit der Verbiegung zu f gemeint. Zu demselben Drehriß $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ gehören ja alle die infinitesimalen Verbiegungen, die aus einer von ihnen durch infinitesimale Schiebung entstehen. Dem entspricht es, daß dieselbe Minimalfläche (15) außer durch ein bestimmtes $f(t)$ auch durch $f(t) + (a + ib)t + (a - ib)t^{-1} + ic$ $(a, b, c$ reell) erzeugt wird.

Für den Abstand der Tangentialebene des Drehrisses vom Koordinatenanfangspunkt (die Weingartensche Funktion) findet man

$$x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z} = \xi\frac{\partial V}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial V}{\partial \eta} + zV = \Re(tf' + zf).$$

Die entsprechende Größe für die Ribaucoursche Mittelenveloppe der zugehörigen isotropen Kongruenz ist

$$xX + yY + zZ = \xi\frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial W}{\partial \eta} + zW = \Re - i(tf' + zf).$$

Die beiden Flächen werden also bezüglich durch f und $-if$ erzeugt und sind daher *adjungierte* Minimalflächen.

[4]) E. Rembs, Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen, Math. Zeitschr. **36** (1933), S. 110—121.

[5]) Über Deutungen im Komplexen siehe Lie-Scheffers, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen (1893), S. 696 u. f. sowie S. 708.

Eingegangen 2. März 1935

Überdeckungen von Komplexen.

Von *Kurt Reidemeister* in Marburg.

Ein Anlaß zur Konstruktion von Überlagerungen ist die Untersuchung von mehrdeutigen Funktionen; ganz ähnlich kann man die Untersuchung von Systemen mehrdeutiger Funktionen, die sich bei gewissen Verknüpfungen reproduzieren, zum Anlaß für die Konstruktion von Überdeckungen nehmen. Um etwa die Ausbreitung eines Körpers von Funktionen über eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit zu beschreiben, wird man zweckmäßig die Mannigfaltigkeit triangulieren, die Funktionselemente in den Zellen der Triangulierung erklären und alsdann die Funktionselemente — genauer die Zellen mit den Funktionselementen — geeignet zusammenfügen. Diese Zusammensetzung erfolgt dabei so, daß Summen und Produkte von Funktionselementen in Summen und Produkte übergehen. Die Funktionselemente mit ihren Verknüpfungen und ihre Zusammenfügung bilden alsdann eine Überdeckung der Mannigfaltigkeit.

Man kann nun Überdeckungen rein kombinatorisch erklären (§ 1) und ihre Zusammenhangseigenschaften rein kombinatorisch untersuchen. Beispielsweise kann man so einer Überdeckung Homologiegruppen als topologische Invarianten zuordnen (§ 2). Ferner lassen sich ähnlich wie reguläre Überlagerungen auch reguläre Überdeckungen, also Überdeckungen mit Automorphien bilden, deren Homologiegruppen alsdann Gruppen mit Operatoren sind (§ 3). Die Dualitätstheoreme für Überdeckungen klären u. a. die besondere Rolle der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten auf und liefern Bedingungen für deren Fundamentalgruppen (§ 5). Den Überdeckungen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten mit Kreisteilungskörpern kann man eine Invariante zuordnen, welche bisher nur in dem speziellen Fall der Linsenräume bekannt war (§ 6).

§ 1. Definition der Überdeckung.

Es sei ein n-dimensionaler zusammenhängender Komplex $\mathfrak{K}$ aus den orientierten Simplizes a_i^k der Dimension k ($k = 0, 1, \ldots, n$) vorgelegt. Die Inzidenzbeziehung zwischen den a_i^k und a_j^{k-1} sei in bekannter Weise durch die Inzidenzmatrix ε_{ij}^k ($\varepsilon = 0, +1$ oder -1) festgelegt.

Unter einer Überlagerung von $\mathfrak{K}$ verstehen wir einen n-dimensionalen Komplex $\mathfrak{U}$, dessen Zellen je eindeutig ein Simplex aus $\mathfrak{K}$ zugeordnet sei, über dem sie liegen. Inzidieren zwei Zellen aus $\mathfrak{U}$ miteinander, so sollen auch die zugehörigen Simplizes aus $\mathfrak{K}$ inzidieren. Der Rand einer Zelle aus $\mathfrak{U}$ und das Büschel einer Zelle aus $\mathfrak{U}$ überlagert genau einmal den Rand bzw. das Büschel des zugeordneten Simplex aus $\mathfrak{K}$. Die Anzahl der Zellen über demselben Simplex von $\mathfrak{K}$ ist für alle Simplizes die gleiche.

Eine Überlagerung $\mathfrak{U}$ heiße eine *Überdeckung*, wenn die Zellen über demselben Simplex eine kommutative Gruppe bilden und diese Gruppenverknüpfung der Zellen, die als Addition bezeichnet werde, mit der Inzidenzbeziehung in folgender Weise zusam-

menhängt: *Sind* u_1^k, u_2^k, u_3^k *drei Zellen aus* $\mathfrak{U}$ *über* a_i^k, $v_1^{k-1}, v_2^{k-1}, v_3^{k-1}$ *drei Zellen aus* $\mathfrak{U}$ *über* a_j^{k-1}, *ist* $u_1^k + u_2^k = u_3^k$ *und inzidieren* u_l^k *und* v_l^{k-1} *miteinander, so ist auch* $v_1^{k-1} + v_2^{k-1} = v_3^{k-1}$. Da es genau eine Zelle v^{k-1} über a_j^{k-1} gibt, welche mit einer Zelle u^k über a_i^k inzidiert und umgekehrt, so vermittelt die Inzidenzbeziehung zwischen den Mengen der Zellen über a_i^k und a_j^{k-1} einen eineindeutigen Isomorphismus. Daraus folgt, daß die Gruppen der Zellen über einem Simplex von $\mathfrak{R}$ alle zueinander und damit zu einer bestimmten Gruppe $\mathfrak{X}$ isomorph sind, die die Koordinatengruppe der Überdeckung heiße.

Mittels der Gruppe $\mathfrak{X}$ werde jeder Zelle u^k aus $\mathfrak{U}$ eineindeutig ein Symbol $x a_i^k$ zugeordnet. Hierin sei a_i^k die Zelle aus $\mathfrak{R}$, über welcher die fragliche Zelle aus $\mathfrak{U}$ liegt, und x sei ein Element aus der Gruppe $\mathfrak{X}$, welches den Zellen u^k bei einer isomorphen Abbildung der Gruppe $\mathfrak{X}$ auf die Gruppe der Zellen über a_i^k zugeordnet wird; x heiße Koordinate von u^k.

Inzidieren die Zellen a_i^k und a_j^{k-1}, so inzidiert nach dem soeben Erörterten jede Zelle $x a_i^k$ genau mit einer Zelle $x' a_j^{k-1}$ und umgekehrt, und die Zuordnung $x\gamma = x'$ ist ein Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{X}$.

Die Inzidenzbeziehungen von $\mathfrak{U}$ werden also vermittelt durch Inzidenzmatrizen γ_{ij}^k, deren Elemente Automorphismen von $\mathfrak{X}$ sind, falls $\varepsilon_{ij}^k \neq 0$ ist; wenn $\varepsilon_{ij}^k = 0$ ist, so sei auch $\gamma_{ij}^k = 0$.

Die Inzidenzmatrizen γ_{ij}^k hängen von der Wahl der Koordinaten x der $x a_i^k$ ab, und diese können mittels eines beliebigen Automorphismus von $\mathfrak{X}$ zu $x' = x\varkappa$ abgeändert werden. Alsdann ändert sich γ_{ij}^k zu $\bar{\gamma}_{ij}^k = \varkappa\gamma_{ij}^k$ und γ_{li}^{k+1} zu $\bar{\gamma}_{li}^{k+1} = \varkappa^{-1}\gamma_{li}^k$ ab.

Im übrigen ist der Zusammenhang der γ_{ij}^k mit der Wegegruppe des Komplexes $\mathfrak{R}$ ganz derselbe wie bei einer Überlagerung [1]). Die γ_{ij}^k genügen den Eckrelationen

$$\gamma_{ij}^k \gamma_{jm}^{k-1} = \gamma_{il}^k \gamma_{lm}^{k-1},$$

welche besagen: Haben zwei Randsimplizes a_j^{k-1} und a_l^{k-1} von a_i^k ein Randsimplex a_m^{k-2} gemeinsam, so haben die Randzellen $x_j a_j^{k-1}$ und $x_l a_l^{k-1}$ der Zelle $x_i a_i^k$ ebenfalls eine Randzelle $x_m a_m^{k-2}$ gemeinsam. Jedem Wege w, welcher die Zellen a_i^k und a_j^l verbindet, ist eine bestimmte Abbildung der $x a_i^k$ auf die $x' a_j^l$, $x' = x\gamma_w$, zugeordnet. Insbesondere entspricht jedem geschlossenen von einer festen Zelle a_1^0 ausgehenden Weg w eine solche Abbildung γ_w, welche sich wegen der Eckrelationen der γ_{ij}^k bei Deformationen [1]) des Weges nicht ändert. Die γ_w sind also eine Darstellung der Wegegruppe durch Automorphismen von $\mathfrak{X}$. Bei Abänderung der Koordinaten auf von a_1^0 verschiedenen Zellen ändern sich die γ_w nicht, bei Abänderung der Koordinaten von a_1^0 transformieren sie sich gleichzeitig mit einem Automorphismus $\varkappa$ zu $\bar{\gamma}_w = \varkappa^{-1}\gamma_w\varkappa$. Jeder Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{R}$ ist also eine Koordinatengruppe $\mathfrak{X}$ und eine Klasse von Darstellungen der Wegegruppe von $\mathfrak{R}$ durch Automorphismen von $\mathfrak{X}$ zugeordnet. Zwei verschiedene solche Darstellungen sind ähnlich, d. h. sie gehen durch Transformation mit einem beliebigen Automorphismus von $\mathfrak{X}$ auseinander hervor. Und die Überdeckung ist durch ihre Koordinatengruppe $\mathfrak{X}$ und eine der Darstellungen der Wegegruppe festgelegt. Umgekehrt gehört zu jeder Gruppe $\mathfrak{X}$ und einer Darstellung der Wegegruppe von $\mathfrak{R}$ durch Automorphismen von $\mathfrak{X}$ eine Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{R}$, welche $\mathfrak{X}$ als Koordinatengruppe besitzt.

---

[1]) Vgl. K. Reidemeister, Die Fundamentalgruppe von Komplexen, Math. Zeitschr. 40 (1935).

Man kann (vgl. § 5) den Automorphismen γ und $\varkappa$ noch die Bedingung auferlegen, daß sie aus einer vorgelegten Untergruppe der Automorphismen von $\mathfrak{X}$ zu entnehmen sind. Beispielsweise können wir für $\mathfrak{X}$ einen Ring nehmen und γ und $\varkappa$ auf Ringautomorphismen beschränken. Die Definition einer solchen speziellen Überdeckung erhalten wir, indem wir für die Zellen über einem Simplex a_i^k die Ringverknüpfungen fordern.

§ 2. Die Homologiegruppen einer Überdeckung.

Wir erklären nunmehr die Ketten einer Überdeckung, die Addition dieser Ketten und den Rand einer Kette, und dann auf diesen Begriffen fußend die Homologiegruppen. Bei der Definition des Randes wird wesentlich benutzt, daß $\mathfrak{X}$ eine kommutative Gruppe ist.

Die Anzahl der Zellen k-ter Dimension von $\mathfrak{K}$ sei α_k. Unter einer *Kette* k-ter Dimension aus $\mathfrak{U}$ verstehen wir den Ausdruck

$$\mathfrak{x}^k = x_1 a_1^k + x_2 a_2^k + \cdots + x_{\alpha_k} a_{\alpha_k}^k .$$

x_i heiße die i-te Komponente von $\mathfrak{x}^k$. Wechselt man die Koordinaten für die Zellen $x a_i^k$ zu $x' = x \varkappa a_i^k$, so geht die Komponente x_i ebenfalls in $x_i' = x_i \varkappa$ über.

Unter der *Summe* der Kette $\mathfrak{x}_1^k$ und der Kette $\mathfrak{x}_2^k$ verstehen wir die Kette $\mathfrak{x}_3^k$ mit

$$\mathfrak{x}_i^k = x_{i,1} a_1^k + x_{i,2} a_2^k + \cdots + x_{i,\alpha_k} x_{\alpha_k}^k \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wenn

$$x_{1,j} + x_{2,j} = x_{3,j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha_k)$$

ist. Diese Erklärung ist von der Wahl der Koordinaten unabhängig. Die Ketten bilden eine Gruppe, welche zu dem α_k-fachen direkten Produkt der Gruppe $\mathfrak{X}$ mit sich selbst einstufig isomorph ist.

Um den *Rand* $R(\mathfrak{x}^k)$ einer Kette $\mathfrak{x}^k$ zu erklären, setzen wir

$$R(\mathfrak{x}^k) = R(x_1 a_1^k) + R(x_2 a_2^k) + \cdots + R(x_{\alpha_k} a_{\alpha_k}^k)$$

und entnehmen $R(x a_i^k)$ in folgender Weise aus den Inzidenzmatrizen: Es sei

$$R(x a_i^k) = \varepsilon_{i1}^k x \gamma_{i1}^k a_1^{k-1} + \varepsilon_{i2}^k x \gamma_{i2}^k a_2^{k-1} + \cdots + \varepsilon_{i\alpha_{k-1}}^k x \gamma_{i\alpha_{k-1}}^k a_{\alpha_{k-1}}^{k-1} \qquad (k > 0).$$

Dabei werde unter $\varepsilon_{ij}^k x'$ entweder x' oder $-x'$ verstanden, je nachdem ε_{ij}^k gleich $+1$ oder gleich -1 ist, und $\varepsilon_{ij}^k x \gamma_{ij}^k$ sei gleich dem Nullelement der Gruppe $\mathfrak{X}$, wenn ε_{ij}^k und γ_{ij}^k gleich 0 war. $R(x a_i^0)$ sei die Nullkette.

Es ist, weil die γ_{ij}^k Automorphismen von $\mathfrak{X}$ sind,

$$R((x + x') a_i^k) =$$
$$\varepsilon_{i1}^k (x \gamma_{i1}^k + x' \gamma_{i1}^k) a_1^{k-1} + \varepsilon_{i2}^k (x \gamma_{i2}^k + x' \gamma_{i2}^k) a_2^{k-1} + \cdots + \varepsilon_{i\alpha_{k-1}}^k (x \gamma_{i\alpha_{k-1}}^k + x' \gamma_{i\alpha_{k-1}}^k) a_{\alpha_{k-1}}^{k-1},$$

und da

$$\varepsilon_{ij}^k (x \gamma_{ij}^k + x' \gamma_{ij}^k) = \varepsilon_{ij}^k x \gamma_{ij}^k + \varepsilon_{ij}^k x' \gamma_{ij}^k$$

ist sowohl für $\varepsilon_{ij}^k = +1$ wie für $\varepsilon_{ij}^k = -1$, weil die Gruppe $\mathfrak{X}$ kommutativ ist, so folgt

$$R((x + x') a_i^k) = R(x a_i^k) + R(x' a_i^k).$$

Hieraus folgt allgemein das distributive Gesetz für den Rand

(1) $$R(\mathfrak{x}_1^k + \mathfrak{x}_2^k) = R(\mathfrak{x}_1^k) + R(\mathfrak{x}_2^k).$$

Schließlich beweisen wir das für die Bildung der Homologiegruppen wichtige Gesetz, daß *der Rand einer Randkette die Nullkette ist*, in Zeichen

(2) $$R(R(\mathfrak{x}^k)) = 0 .$$

Nach Erklärung der Randketten braucht dies nur für $\mathfrak{x}^k = x a_i^k$ mit $k > 1$ nachgewiesen zu werden. Nun ist aber

$$R(R(x a_i^k)) = \Sigma \varepsilon_{jl}^{k-1} \varepsilon_{ij}^k x \gamma_{ij}^k \gamma_{jl}^{k-1} a_l^{k-2}.$$

Hierin tritt jedes a_l^{k-2}, das in der Summe überhaupt mit einem von 0 verschiedenen Faktor behaftet ist, nach den bekannten Eigenschaften des Randes eines Simplex genau zweimal auf, etwa für $j = 1$ und für $j = 2$; für die Inzidenzsymbole ε gilt

$$\varepsilon_{1l}^{k-1} \varepsilon_{i1}^k = - \varepsilon_{2l}^{k-1} \varepsilon_{i2}^k,$$

und nach den Eckrelationen ist

$$x \gamma_{i1}^k \gamma_{1l}^{k-1} = x \gamma_{i2}^k \gamma_{2l}^{k-1};$$

mithin heben sich die beiden zu a_l^{k-2} gehörigen Summanden gegeneinander fort, und es ist tatsächlich

$$R(R(x a_i^k)) = 0.$$

Zugleich entnehmen wir aus unserem Beweis, daß die Gleichungen $R(R(\mathfrak{x})) = 0$ die Eckrelationen zur Folge haben.

Die Homologiegruppen einer Überdeckung lassen sich nun wie üblich erklären. Geschlossen ist eine Kette, deren Randkette die Nullkette ist, und homolog Null ist eine Kette, wenn sie Randkette ist. Eine Kette, die homolog zu Null ist, ist wegen (2) geschlossen. Die geschlossenen Ketten der Dimension k bilden wegen (1) eine Gruppe $\mathfrak{G}^k$; die Ketten der Dimension k, die homolog zu Null sind, bilden ebenfalls wegen (1) eine Gruppe, und zwar eine Untergruppe $\mathfrak{R}^k$ von $\mathfrak{G}^k$; und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}^k/\mathfrak{R}^k$ ist die Homologiegruppe $\mathfrak{H}^k$.

Bei Unterteilungen des Komplexes $\mathfrak{K}$ bleiben die Homologiegruppen unverändert.

§ 3. Eigenschaften von Überdeckungen.

Es mögen jetzt einige Eigenschaften zusammengestellt werden, welche Überdeckungen zukommen können. Eine Überdeckung kann *zerlegbar* sei. Darunter werde das Folgende verstanden: Die Koordinatengruppe $\mathfrak{X}$ der Überdeckung $\mathfrak{U}_x$ sei das direkte Produkt von zwei Gruppen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$, jedes Element x aus $\mathfrak{X}$ lasse sich also auf genau eine Weise als

$$x = y + z$$

schreiben, wo y aus $\mathfrak{Y}$ und z aus $\mathfrak{Z}$ genommen ist, und ferner mögen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ bei den Automorphismen γ in sich übergehen, so daß also

$$y\gamma = y', \quad z\gamma = z'$$

gesetzt werden kann. Es existieren dann zwei Überdeckungen $\mathfrak{U}_y$ und $\mathfrak{U}_z$ mit den Koordinatengruppen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ und mit denselben Inzidenzmatrizen wie $\mathfrak{U}_x$, jede Zelle aus $\mathfrak{U}_x$ läßt sich eindeutig als Summe von einer Zelle aus $\mathfrak{U}_y$ und einer Zelle aus $\mathfrak{U}_z$ schreiben,

$$x a_i^k = y a_i^k + z a_i^k = (y + z) a_i^k,$$

und inzidieren die Zellen $y a_i^k$, $y' a_j^{k-1}$ in $\mathfrak{U}_y$, die Zellen $z a_i^k$, $z' a_j^{k-1}$ in $\mathfrak{U}_z$, so inzidieren die Zellen $y a_i^k + z a_i^k$, $y' a_j^{k-1} + z' a_j^{k-1}$ in $\mathfrak{U}_x$ und umgekehrt. Wir nennen $\mathfrak{U}_x$ die direkte Summe von $\mathfrak{U}_y$ und $\mathfrak{U}_z$ und schreiben dafür

$$\mathfrak{U}_x = \mathfrak{U}_y + \mathfrak{U}_z.$$

Eine Kette aus $\mathfrak{U}_x$ läßt sich ebenfalls eindeutig in eine Summe einer Kette aus $\mathfrak{U}_y$ und einer Kette aus $\mathfrak{U}_z$ zerlegen,

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z},$$

und der Rand von $\mathfrak{x}$ ist

$$R(\mathfrak{x}) = R(\mathfrak{y}) + R(\mathfrak{z}).$$

Eine Kette $\mathfrak{x}$ ist dann und nur dann geschlossen, wenn die zugehörigen Ketten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ geschlossen sind, und dann und nur dann homolog zu Null, wenn die zugehörigen Ketten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ homolog zu Null sind. Daraus folgt, daß die Homologiegruppen von $\mathfrak{U}_x$ die direkten Produkte der Homologiegruppen von $\mathfrak{U}_y$ und $\mathfrak{U}_z$ sind. Damit ist die Untersuchung der Überdeckung $\mathfrak{U}_x$ auf die ihrer Summanden $\mathfrak{U}_y$ und $\mathfrak{U}_z$ zurückgeführt.

Eine Überdeckung möge *regulär* genannt werden, wenn sie Automorphismen besitzt, d. h. wenn die Zellen so aufeinander abgebildet werden können, daß die zwischen ihnen bestehenden Verknüpfungen und Inzidenzbeziehungen nicht zerstört werden. Ist ϱ ein solcher Automorphismus, so muß $\varrho(xa_i^k) = x'a_i^k$ und daher $\varrho x = x'$ ein Automorphismus von $\mathfrak{X}$ sein. Da die Inzidenzbeziehungen erhalten bleiben sollen, muß für alle γ

$$\varrho(x\gamma) = (\varrho x)\gamma$$

gelten, d. h. der Automorphismus $\varrho x = x'$ muß mit den Automorphismen γ vertauschbar sein. Umgekehrt ist ein Automorphismus $\varrho x = x'$ der Gruppe $\mathfrak{X}$, welcher mit allen Automorphismen γ vertauschbar ist, auch ein Automorphismus von $\mathfrak{U}$.

Gestattet $\mathfrak{U}$ den Automorphismus ϱ, so wird durch ϱ auch jede Kette $\mathfrak{x}$ in eine Kette $\varrho\mathfrak{x}$ transformiert, und zwar ist der Rand der transformierten Kette gleich der Transformierten des Randes der ursprünglichen Kette,

$$R(\varrho\mathfrak{x}) = \varrho R(\mathfrak{x}).$$

Daraus folgt, daß ϱ die Homologiegruppen von $\mathfrak{U}$ ebenfalls auf sich automorph abbildet und die Homologiegruppen also Gruppen mit dem Operator ϱ sind. Reguläre Überdeckungen besitzen also als Homologiegruppen Gruppen mit Operatoren.

Ein Beispiel für reguläre Überdeckungen erhalten wir, wenn wir für die Koordinatengruppe $\mathfrak{X}$ ein halbeinfaches hyperkomplexes System, als Gruppenverknüpfung die Addition nehmen und den Automorphismen γ ein bestimmtes Element g des hyperkomplexen Systems zuordnen mit der Festsetzung

$$x\gamma = xg.$$

Das Element g muß ein inverses bei der Multiplikation besitzen. Jedem Element d aus $\mathfrak{X}$, das ein inverses bei Multiplikation besitzt, läßt sich dann auch ein Automorphismus ϱ zuordnen, indem wir

$$x = dx$$

setzen; denn es ist

$$(dx)g = (gx)d.$$

An dem Beispiel können wir das Verhalten der Regularität bei Zerlegung von Überdeckungen beleuchten. Läßt sich das hyperkomplexe System $\mathfrak{X}$ in eine direkte Summe von hyperkomplexen Systemen

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}$$

zerlegen, so können wir ebenso $\mathfrak{U}_x$ in die Summanden $\mathfrak{U}_y$ und $\mathfrak{U}_z$ zerlegen. $\mathfrak{U}_y$ und $\mathfrak{U}_z$ sind alsdann ebenfalls regulär und besitzen die analogen Automorphismen wie $\mathfrak{U}_x$. Ist $\mathfrak{X}$ dagegen ein einfaches System und in die direkte Summe von zwei Rechtsidealen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ zerlegt, so gestatten die Überdeckungen $\mathfrak{U}_y$ und $\mathfrak{U}_z$ einen Automorphismus ϱ von $\mathfrak{U}_x$ im allgemeinen nicht mehr.

Nehmen wir für $\mathfrak{X}$ einen affinen Vektorraum, so bilden die Automorphismen γ_w eine lineare Darstellung der Wegegruppe des Komplexes $\mathfrak{K}$, und wir erhalten also jeder

Klasse äquivalenter linearer Darstellungen der Wegegruppe eine Überdeckung des Komplexes zugeordnet.

Schließlich fassen wir den Fall ins Auge, daß $\mathfrak{X}$ ein Körper ist und die γ Automorphismen dieses Körpers bilden. Wenn wir in der zugehörigen Überdeckung die Verknüpfung der Ketten erklären wollen, so können wir einmal die additive und einmal die multiplikative Verknüpfung des Körpers zugrunde legen; entsprechend ergeben sich zwei verschiedenen Randdefinitionen; bei der einen bedeutet εx für $\varepsilon = -1$ das Element $-x$, bei der anderen bedeutet es das Element x^{-1}.

§ 4. Kettenringe.

Die nähere Strukturuntersuchung von Überdeckungen wollen wir auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{X}$ ein Ring mit Einselement ist und daß es für jedes γ ein Ringelement g mit $x\gamma = xg$ gibt. Die Gesamtheit der Ketten mit ihren Verknüpfungen und Berandungsrelationen nennen wir in diesem Fall einen Kettenring. Wir heben hervor, daß es neben der Addition und Randbildung für jedes x und jede Kette $\mathfrak{x}$ noch die Operation $x\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$ gibt und daß

$$R(x\mathfrak{x}) = xR(\mathfrak{x})$$

gilt. Ist

$$\mathfrak{x}^k = x_1\mathfrak{x}_1^k + x_2\mathfrak{x}_2^k + \cdots + x_{\alpha_k}\mathfrak{x}_{\alpha_k}^k,$$

so nennen wir $\mathfrak{x}^k$ eine Linearkombination der $\mathfrak{x}_i^k$, und die $\mathfrak{x}_i^k$ $(i = 1, 2, \ldots, \alpha_k)$ mögen eine *Basis* der k-dimensionalen Kette heißen, wenn sämtliche $\mathfrak{x}^k$ auf eine und nur eine Weise sich als Linearkombination der $\mathfrak{x}_i^k$ $(i = 1, 2, \ldots, \alpha_k)$ darstellen lassen. Sind x_{il} $(l = 1, 2, \ldots, \alpha_k)$ die Komponenten von $\mathfrak{x}_i^k$, so erhalten wir für $x_{il} = 0$ oder 1, je nachdem $i \neq 1$ oder $i = 1$ ist, gewiß eine Basis; diese heiße die Grundbasis. Mit $\mathfrak{x}_i^k$ sind alle diejenigen Systeme Basissysteme, deren Komponenten durch Koordinatenabänderungen

$$x'_{il} = x_{il}\varkappa_l = x_{il}d_l$$

aus den Komponenten von $\mathfrak{x}_i^k$ hervorgehen, und mit $\mathfrak{x}_i^k$ ist auch $\mathfrak{x}_1^k + x\mathfrak{x}_2^k$, $\mathfrak{x}_i^k$ $(i > 1)$ ein Basissystem. Die d sind dabei Elemente, die ein inverses besitzen. Wir wollen weiterhin nur solche Basissysteme zulassen, welche durch eine Folge der beiden angegebenen Umformungen und Permutationen aus der Grundbasis entstehen.

Die Komponenten von Ketten bezüglich einer Basis erfahren bei Basiswechsel eine homogene lineare Transformation $x'_i = \Sigma x_j\xi_{ij}$. Diese Transformationen bilden eine Gruppe, die durch die Transformation mit $\xi_{ij} = 0$ für $i \neq j$, $\xi_{ii} = d_i$, sowie die Transformationen mit $\xi_{ii} = 1$, $\xi_{12} = x$, sonst $\xi_{ij} = 0$, und Permutationen erzeugt wird.

Sind die Randketten für eine Basis $\mathfrak{x}_i^k$ bekannt, so lassen sich daraus die Randketten beliebiger Ketten $\mathfrak{x}^k$ wegen (1) und (3) berechnen, und die Randketten von $\mathfrak{x}_i^k$ sind gegeben, wenn ihre Komponenten bezüglich irgendeiner Basis $\mathfrak{x}_j^{k-1}$ bekannt sind. Wir können also an Stelle der Grundbasen irgendwelche Basissysteme in allen Dimensionen einführen und die Inzidenzmatrizen durch *Berandungsmatrizen* r_{ij}^k ersetzen, welche aus den Komponenten der Randketten $R(\mathfrak{x}_i^k)$ der Basis $\mathfrak{x}_i^k$ bezüglich der Basis $\mathfrak{x}_j^{k-1}$ bestehen,

$$R(\mathfrak{x}_i^k) = \Sigma r_{ij}^k\mathfrak{x}_j^k.$$

Für die Grundbasen ist

$$r_{ij}^k = \varepsilon_{ij}^k g_{ij}^k \tag{4}$$

die Berandungsmatrix.

Bei einer Abänderung der Basis $\mathfrak{x}_j^k$ erfahren die Matrizen r_{ij}^{k+1} und r_{jl}^k eine Abänderung, und zwar wird r_{ij}^{k+1} mit einer Matrix ξ_{mn} von links, und r_{jl}^k mit der inversen Matrix ξ'_{mn} von rechts multipliziert. Übrigens ist das Produkt der Matrizen r_{ij}^{k+1} und r_{jl}^k infolge $R(R(\mathfrak{x}^{k+1})) = 0$ die Nullmatrix.

Ein Beispiel eines Kettenringes ist, der Homotopiekettenring, den wir erhalten, wenn wir für $\mathfrak{X}$ den Gruppenring der Wegegruppe von $\mathfrak{K}$ nehmen. Man kann den Gruppenring über einem beliebigen Integritätsbereich oder Körper nehmen. Die Koordinatenabänderungen $x' = x\varkappa$ kann man hierbei auf $x' = \pm xg$ einschränken, wo g ein Gruppenelement des Gruppenringes ist. Ist $\mathfrak{Y}$ ein zu $\mathfrak{X}$ homomorpher Ring und $x\varphi = y$ der Homomorphismus von $\mathfrak{X}$ auf $\mathfrak{Y}$, so erhalten wir die Inzidenzmatrizen der zu $\mathfrak{Y}$ gehörigen Überdeckung, wenn wir die Elemente der zu $\mathfrak{X}$ gehörigen Inzidenzmatrizen g_{ij}^k bzw. durch $g_{ij}^k\varphi$ ersetzen. Ist $\mathfrak{X}$ ein Gruppenring, so entsprechen den Gruppenelementen g aus $\mathfrak{X}$ gewisse Elemente $h = g\varphi$, und man kann die Koordinatenabänderungen $y' = y\varkappa$ auf $y' = \pm yh$ beschränken. Dadurch werden die zulässigen Basisabänderungen ebenfalls entsprechend eingeschränkt: in den Matrizen $\xi_{ii} = d_i$, $\xi_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ dürfen die $\pm d_i = g_i$ bzw. h_i vom Vorzeichen abgesehen nur Gruppenelemente bzw. Gruppenelementen homomorph entsprechende Elemente sein.

Das Verhalten des Homotopiekettenringes bei Unterteilungen von $\mathfrak{K}$ ist bekannt [2]) und das Verhalten beliebiger Kettenringe ganz analog: Geht $\mathfrak{K}'$ durch Unterteilung aus $\mathfrak{K}$ hervor und ist $\mathfrak{U}'$ die Überdeckung von $\mathfrak{K}'$, welche dieselbe Koordinatengruppe $\mathfrak{X}$ wie $\mathfrak{U}$ hat und zu derselben Darstellung der Wegegruppe durch Automorphismen von $\mathfrak{X}$ gehört, so geht der Kettenring von $\mathfrak{U}'$ durch Erweiterung, d. h. durch Hinzunahme von Basisketten $\mathfrak{x}_{\alpha_k+1}^k$, $\mathfrak{x}_{\alpha_{k-1}+1}^{k-1}$ mit der Berandungsrelation

$$R(\mathfrak{x}_{\alpha_k+1}^k) = \mathfrak{x}_{\alpha_{k-1}+1}^{k-1},\quad R(\mathfrak{x}_{\alpha_{k-1}+1}^{k-1}) = 0$$

aus dem Kettenring von $\mathfrak{U}$ hervor.

Daraus folgt, daß Eigenschaften der Berandungsmatrizen r_{ij}^k, welche bei Basiswechsel und bei Erweiterungen erhalten bleiben, invariant gegen Unterteilungen sind. Für Kettenringe, die durch einen Homomorphismus aus dem Homotopiekettenring entstehen, folgt dies unmittelbar aus der homomorphen Beziehung, für beliebige Kettenringe ist der Beweis analog wie bei Homotopiekettenringen zu erbringen.

§ 5. Duale Kettenringe.

Schließlich wenden wir uns den Dualitätsbeziehungen von Komplexen und Überdeckungen zu. Der Komplex $\mathfrak{K}^*$ sei dual zu $\mathfrak{K}$, die Überdeckung $\mathfrak{U}^*$ von $\mathfrak{K}^*$ heiße dual zu der Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{K}$, wenn sich die Zellen der Dimension k aus $\mathfrak{U}$ eineindeutig und isomorph auf die Zellen von $(n - k)$-ter Dimension von $\mathfrak{U}$ abbilden lassen. Die Inzidenzmatrizen ε^{*k}_{ij} und ε^k_{ij} von $\mathfrak{K}^*$ und $\mathfrak{K}$ stehen alsdann in der Beziehung

$$\varepsilon^{*k}_{ij} = \varepsilon^{n-k+1}_{ji}.$$

Die Koordinatengruppen von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ sind identisch, und die Inzidenzmatrizen der Überdeckungen stehen in der Beziehung

$$\gamma^{*k}_{ij} = (\gamma^{n-k+1}_{ji})^{-1} \text{ oder } = 0, \tag{5}$$

je nachdem $\gamma^{n-k+1}_{ji} \neq 0$ oder $= 0$ ist. Denn γ^k_{ij} ist ja eine Abbildung der Zellen xa_i^k auf die Zellen $x'a_j^{k-1}$, und beim dualen Übergang ist die Richtung der Abbildung umzukehren.

[2]) Vgl. K. Reidemeister, Homotopiegruppen von Komplexen, Abh. Math. Sem. Hamburg **10** (1934), S. 211. Durch dies Verhalten wird die oben angegebene Einschränkung der Basissysteme gerechtfertigt.

Duale Kettenringe wollen wir nur für den Fall betrachten, daß die Koordinatengruppe $\mathfrak{X}$ ein Gruppenring oder ein Ring $\mathfrak{Y}$ ist, der durch einen festen Homomorphismus $x\varphi = y$ auf den Gruppenring $\mathfrak{X}$ abgebildet ist. Zur Beschreibung der dualen Berandungsmatrizen erklären wir einen Antiisomorphismus des Gruppenrings, indem wir jedem Element x ein *konjugiertes* Element $\bar{x}$ eineindeutig zuordnen. Ist x ein Gruppenlement, so sei $\bar{x} = x^{-1}$; liegt x im Grundbereich, über welchem der Gruppenring gebildet ist, so sei $\bar{x} = x$, ferner sei $\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ und $\overline{x_1 x_2} = \bar{x}_2 \bar{x}_1$. Dadurch ist x allgemein und widerspruchsfrei festgelegt.

Dem Homomorphismus φ werde die Bedingung auferlegt, daß mit

$$x\varphi = 0 \text{ auch } \bar{x}\varphi = 0 \tag{6}$$

ist. Alsdann können wir $\bar{y}$ für $y = x\varphi$ durch $\bar{y} = \bar{x}\varphi$ erklären, denn aus $y = x_1\varphi = x_2\varphi$ folgt $\bar{x}_1\varphi = \bar{x}_2\varphi$.

Ist x_{ij} eine Matrix, so heiße die Matrix $\bar{x}_{ji}$ die *konjugierte Matrix*; sie entsteht aus der ursprünglichen durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen und Ersetzung der Matrizenelemente durch ihre konjugierten. Der Übergang von den Matrizen zu ihren konjugierten ist ein Antiisomorphismus des Matrizenringes. Die den Basisabänderungen zugeordneten Matrizen ξ_{ij} gehen wieder in eine solche Matrix über, wenn wir die zu ξ_{ij} konjugierte Matrix $\bar{\xi}_{ji}$ bilden, wie man an der erzeugenden Basisabänderung leicht bestätigt und daraus für beliebige Basisabänderungen erschließt.

Nunmehr können wir auch den Zusammenhang zwischen dualen Kettenringen kennzeichen. *Sind r^k_{ij}, r^{*k}_{ij} Berandungsmatrizen dualer Kettenringe, so kann man durch Zuordnung der Basissysteme erreichen, daß*

$$r^{*k}_{ij} = \bar{r}^{n-k+1}_{ji} \tag{7}$$

wird. Diese Beziehung gilt nach (4) und (5) für die Berandungsmatrizen der Grundbasis, und zu jeder Basis des einen Kettenringes gibt es nach unseren Feststellungen über konjugierte Matrizen im allgemeinen und die Matrizen ξ_{ij} im besonderen eine solche duale Basis des dualen Kettenringes, daß die Gleichungen (7) gelten.

Ist ein Komplex $\mathfrak{K}$ zu dem dualen Komplex $\mathfrak{K}^*$ elementarverwandt, d. h. lassen diese beiden Komplexe sich durch Unterteilungen ineinander überführen, so sind für einen Homotopiekettenring die Invarianten der Berandungsmatrizen

$$r^k_{ij} \text{ und } r^{*k}_{ij} = \bar{r}^{n-k+1}_{ji}$$

gegenüber Basisabänderungen und Erweiterungen dieselben. Denn die zum Gruppenring $\mathfrak{X}$ gehörigen Überdeckungen $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{U}^*$ von $\mathfrak{K}^*$ sind zueinander dual und elementarverwandt. Durch Anwendung eines Homomorphismus φ mit (6) erkennt man, daß die Berandungsmatrizen

$$r^k_{ij}\varphi \text{ und } r^{*k}_{ij}\varphi = \bar{r}^{n-k+1}_{ji}\varphi$$

auch für einen Kettenring, der zu einem Homotopiering homomorph ist, dieselben Invarianten gegenüber Basisabänderungen und Erweiterungen besitzen.

Beispiele für Homomorphismen, bei denen $\bar{x}\varphi = \bar{y}$ gesetzt werden kann, werden durch die Gruppenhomomorphismen geliefert, welche die Gruppenelemente g auf die Elemente h einer homomorphen Gruppe abbilden. Denn ist

$$g_1\varphi = g_2\varphi = h,$$

so ist auch

$$g_1^{-1}\varphi = g_2^{-1}\varphi = h^{-1}.$$

Insbesondere kann man für die h geeignete Einheitswurzeln nehmen, $g\varphi$ ist dann ein sogenannter Charakter der Faktorkommutatorgruppe der g, und wenn $\mathfrak{X}$ der Gruppenring über den ganzen rationalen Zahlen als Grundbereich war, so besteht $\mathfrak{X}\varphi = \mathfrak{Y}$ aus ganzen algebraischen Zahlen des Kreisteilungskörpers, der durch Adjunktion der Einheitswurzeln h zum rationalen Körper entsteht. Die Zahl $\bar{h}$ und damit $\bar{y}$ ist in diesem Fall die zu h bzw. zu y konjugiert-komplexe Zahl. Die Determinanten aus den Matrizen ξ_{ij} sind Einheitswurzeln des Kreisteilungskörpers, weil dies für die erzeugenden Basisabänderungen gilt.

Beispiele für Komplexe $\mathfrak{K}$, die zu ihren dualen $\mathfrak{K}^*$ elementarverwandt sind, bilden die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Die Berandungsmatrizen ihrer Homotopiekettenringe lassen sich in die Form

$$r^3_{1i} = 1 - g_i,\ r^2_{ij},\ r^1_{j1} = 1 - g'_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, \alpha)$$

bringen, die Basis der nulldimensionalen und der dreidimensionalen Ketten besteht also nur aus je einer Kette, die Anzahl der Basisketten erster und die zweiter Dimension sind gleich und die r^3_{1i} mit r^1_{j1} haben gewisse spezielle Werte: die g_i und g'_j sind Gruppenelemente, von denen auch zwei verschieden bezeichnete gleich sein können, und sowohl die g_i wie die g'_j bilden ein Erzeugendensystem der Gruppe der g. Die dualen Berandungsmatrizen sind

$$r^{*3}_{1j} = \bar{r}^1_{j1},\ r^{*2}_{ji} = \bar{r}^2_{ij},\ r^{*1}_{i1} = \bar{r}^3_{1i}.$$

Daß r^3_{1i} und $\bar{r}^1_{j1}$ einerseits und r^1_{i1} und $\bar{r}^3_{1i}$ andrerseits durch Basisabänderungen und Erweiterungen ineinander übergehen, ist aus ihrer speziellen Struktur leicht zu folgern. Dagegen erhalten wir eine wesentliche Bedingung für die Berandungsmatrix r^2_{ij}: *Ist r^2_{ij} die Berandungsmatrix für die zweidimensionalen Ketten des Homotopiekettenringes einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, so lassen sich die Matrizen r^2_{ij} und $\bar{r}^2_{ji}$ durch Basisabänderungen und Erweiterungen ineinander überführen.* Gehen wir zu einer homomorphen Überdeckung über, indem wir die Gruppe der g mittels $g\varphi = h$ auf die kommutative Gruppe der h homomorph abbilden, so haben die Matrixen $r^2_{ij}\varphi$ Elementarteilerideale als Invarianten, und diese müssen also beim Übergang zum konjugierten in sich übergehen; denn die Vertauschung von Zeilen und Kolonnen läßt ja die Elementarteiler unverändert. Diese Symmetrie erinnert an die analoge Eigenschaft bei dem L-Polynom eines Knotens und steht vielleicht auch in einem sachlichen Zusammenhang mit ihr.

§ 6. Ein Beispiel.

Schließlich wollen wir die zu einem Kreisteilungskörper gehörige Überdeckung einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit betrachten. Wir bezeichnen die Berandungsmatrizen des zugehörigen Kettenringes wieder mit

$$r^3_{1i},\ r^2_{ij},\ r^1_{j1}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

und fragen nach Invarianten dieser Matrizen gegenüber Basisabänderungen, und zwar unter der Annahme, daß der Rang der Matrizen r^3_{1i} und r^1_{j1} gleich 1 und der Rang der Matrix r^2_{ij} gleich $\alpha - 1$ ist. Wegen

$$\sum_i r^3_{1i} r^2_{ij} = 0, \qquad \sum_j r^2_{ij} r^1_{j1} = 0$$

ist alsdann, wenn wir die Adjunkte des Elementes r^2_{ij} in der Matrix dieser Elemente mit R^2_{ij} bezeichnen und unter λ^3_j, λ^1_i geeignete Proportionalitätsfaktoren verstehen,

$$r^3_{1i} = R^2_{ij}\lambda^3_j,\ r^1_{j1} = R^2_{ij}\lambda^1_i,$$

also ist

$$R^2_{ij}\lambda^3_j\lambda^1_i = r^3_{1i}\lambda^1_i = r^1_{j1}\lambda^1_j$$

von i und j unabhängig und werde gleich A gesetzt. Wir finden dann

$$r^3_{1i} = \frac{A}{\lambda^1_i} \qquad r^1_{j1} = \frac{A}{\lambda^1_j}$$

und

$$A R^2_{ij} = r^3_{1i} r^1_{j1}.$$

Da sich die Matrizen R^2_{ij} und $r^3_{1i} r^1_{j1} = r_{ij}$ in gleicher Weise bei Basiswechsel der ein- und zweidimensionalen Ketten umsetzen, so bleibt A hierbei unverändert. Bei Abänderung der null- und dreidimensionalen Basiskette multipliziert sich r^3_{1i} und r^1_{j1} und entsprechend A mit einer Einheitswurzel, denn R^2_{ij} bleibt unverändert. Die Zahl A ist also von Multiplikationen mit Einheitswurzeln abgesehen eine Invariante des Kettenringes. Bei Erweiterungen der ein- und zweidimensionalen Ketten bleibt A ebenfalls unverändert. Nun kann man aber zwei Homotopiekettenringe über derselben Mannigfaltigkeit, welche beide nur je eine null- und dreidimensionale Basiskette enthalten, allein durch Erweiterungen erster und zweiter Dimension ineinander überführen [3]). Dasselbe gilt also von Kettenringen, die zu Homotopiekettenringen homomorph sind, und A ist also (bis auf Einheitswurzelfaktoren) eine Invariante der Überdeckung gegenüber Unterteilungen.

Die Invariante A ist von Interesse, weil sie zeigt, daß die Elementarteiler der Berandungsmatrizen nicht die einzigen Invarianten des Kettenringes bei Erweiterungen sind. Ferner sei hervorgehoben, daß die kürzlich angegebene Klassifikation der Linsenräume sich durch einfache Umformung der a. a. O. angestellten Überlegungen auf die Invarianz von A zurückführen läßt.

---

[3]) Vgl. K. Reidemeister, Die Klassifikation der Linsenräume, Abh. Math. Sem. Hamburg **11** (1935).

Eingegangen 3. April 1935.

Überdeckungen topologischer Komplexe mit hyperkomplexen Systemen.

Von *Wolfgang Franz* in Marburg.

Im folgenden sollen die in der vorangehenden Arbeit [1]) eingeführten Überdeckungen topologischer Komplexe in dem Fall näher untersucht werden, daß die Koordinatengruppe $\mathfrak{X}$ ein halbeinfaches hyperkomplexes System oder eine Maximalordnung eines solchen ist. Ist $\mathfrak{K}$ ein n-dimensionaler Komplex bestehend aus den Zellen a_i^k ($k = 0, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, \alpha_k$), so bilden die sämtlichen k-dimensionalen Ketten der Überdeckung

$$\mathfrak{x}^k = x_1 a_1^k + \cdots + x_{\alpha_k} a_{\alpha_k}^k$$

eine verallgemeinerte abelsche Gruppe mit $\mathfrak{X}$ als linksseitigem Operatorenbereich (kurz Operatorgruppe über $\mathfrak{X}$). α_k k-dimensionale Ketten $\mathfrak{x}_i^k$ ($i = 1, \ldots, \alpha_k$) heißen eine Basis der k-dimensionalen Kettengruppe, wenn sich jede Kette eindeutig in der Form $x_1 \mathfrak{x}_1^k + \cdots + x_{\alpha_k} \mathfrak{x}_{\alpha_k}^k$ mit x_i aus $\mathfrak{X}$ darstellen läßt. Die a_i^k bilden eine spezielle Basis, die Grundbasis. Ist $\mathfrak{y}_i^k$ ($i = 1, \ldots, \alpha_k$) ein anderes Basissystem, so ist im Sinne des Matrizenkalküls, wenn wir mit $\mathfrak{x}_i^k$ bzw. $\mathfrak{y}_i^k$ zugleich die α_k-gliedrige Spalte der $\mathfrak{x}_i^k$ bzw. $\mathfrak{y}_i^k$ bezeichnen,

$$\mathfrak{x}_i^k = P_k \mathfrak{y}_i^k, \quad \mathfrak{y}_i^k = Q_k \mathfrak{x}_i^k,$$

wo P_k, Q_k α_k-reihige quadratische Matrizen aus $\mathfrak{X}$ sind. Es folgt

$$\mathfrak{x}_i^k = P_k Q_k \mathfrak{x}_i^k, \quad P_k Q_k = E$$

(α_k-reihige Einheitsmatrix) wegen der Basiseigenschaft der $\mathfrak{x}_i^k$. P_k besitzt also eine Rechtsinverse. Wir betrachten im folgenden nur solche Systeme, in denen damit zugleich die Existenz einer Inversen $P_k^{-1} = Q_k$ schlechthin gesichert ist; invertierbare Matrizen und nur solche vermitteln also den Basiswechsel, wenn die Anzahl der Basiselemente festgehalten wird.

Durch die Operation **R** der Randbildung wird jeder k-dimensionalen Kette eine $(k-1)$-dimensionale Kette $\mathbf{R}(\mathfrak{x}^k) = \mathfrak{x}^{k-1}$ zugeordnet mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathfrak{x}^k + \mathfrak{x}'^k) &= \mathbf{R}(\mathfrak{x}^k) + \mathbf{R}(\mathfrak{x}'^k), \\ \mathbf{R}(x\mathfrak{x}^k) &= x\ \mathbf{R}(\mathfrak{x}^k). \end{aligned}$$

Danach bilden die k-dimensionalen Ketten mit dem Rande Null, die geschlossenen Ketten, eine Untergruppe $\mathfrak{G}_k$ in der Gruppe aller $\mathfrak{x}^k$, und zwar eine zulässige Untergruppe, d. h. eine solche, die ebenfalls $\mathfrak{X}$ als Linksoperatorenbereich gestattet. Wir setzen $\mathfrak{G}_0$ gleich der Gruppe aller $\mathfrak{x}^0$. Die Operation **R** ist völlig festgelegt, wenn sie für ein Basissystem $\mathfrak{x}_i^k$ festgelegt ist, etwa in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{R}(\mathfrak{x}_i^k) = R_{k-1} \mathfrak{x}_i^{k-1} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

[1]) K. Reidemeister, Überdeckungen von Komplexen.

wo R_{k-1} eine Matrix vom Typus (α_k, α_{k-1}) (α_k Zeilen, α_{k-1} Spalten) ist. Diese Berandungsmatrizen ändern sich bei einem Basiswechsel der oben beschriebenen Art wie folgt: Es ist

$$\mathbf{R}(\mathfrak{y}_i^k) = \mathbf{R}(P_k^{-1}\mathfrak{x}_i^k) = P_k^{-1}\mathbf{R}(\mathfrak{x}_i^k) = P_k^{-1}R_{k-1}\mathfrak{x}_i^{k-1} = P_k^{-1}R_{k-1}P_{k-1}\mathfrak{y}_i^{k-1}.$$

Die Berandungsmatrizen S_{k-1} für das Basissystem $\mathfrak{y}_i^k$ lauten also

$$S_{k-1} = P_k^{-1}R_{k-1}P_{k-1}.$$

Für die Operation $\mathbf{R}$ gilt ferner die Relation

$$\mathbf{R}(\mathbf{R}(\mathfrak{x}^{k+1})) = 0.$$

Danach bilden die k-dimensionalen Ketten, die Rand einer $(k+1)$-dimensionalen Kette sind $(k = 0, \ldots, n-1)$ eine Untergruppe $\mathfrak{R}_k$ von $\mathfrak{G}_k$, die ebenfalls den Operatorenbereich $\mathfrak{X}$ gestattet. Für $k = n$ setzen wir $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{G}_n$. Für die Berandungsmatrizen R_k besagt diese Relation

$$\mathbf{R}(\mathbf{R}(\mathfrak{x}_i^{k+1})) = \mathbf{R}(R_k\mathfrak{x}_i^k) = R_k\mathbf{R}(\mathfrak{x}_i^k) = R_kR_{k-1}\mathfrak{x}_i^{k-1} = 0,$$

also $R_kR_{k-1} = 0$ wegen der Basiseigenschaft der $\mathfrak{x}_i^{k-1}$. Die Faktorgruppe $\mathfrak{H}_k = \mathfrak{G}_k/\mathfrak{R}_k$ heißt die k-dimensionale Homologiegruppe der betrachteten Überdeckung. Sie ist ebenfalls eine Operatorgruppe über $\mathfrak{X}$ und ist bei Unterteilung des Komplexes $\mathfrak{K}$ invariant. Um Invarianten von $\mathfrak{H}_k$ und damit von $\mathfrak{K}$ zu bestimmen, untersuchen wir im folgenden zunächst allgemeine Operatorgruppen über den angegebenen Ringen $\mathfrak{X}$.

Ist $\mathfrak{X}$ eine halbeinfache Algebra,

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 + \cdots + \mathfrak{X}_v$$

ihre direkte Summenzerlegung in einfache Algebren $\mathfrak{X}_i$ gemäß dem ersten Wedderburnschen Struktursatz, so zerfallen in analoger Weise auch die Ketten und die Berandungsmatrizen

$$\mathfrak{x}^k = \mathfrak{x}_1^k + \cdots + \mathfrak{x}_v^k, \quad R_k = R_{k1} + \cdots + R_{kv} \qquad (R_{ki} \text{ in } \mathfrak{X}_i)$$

in v Summanden. Die Überdeckung des Komplexes $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{X}$ vermöge der R_k zerlegt sich daher in die voneinander unabhängigen Überdeckungen von $\mathfrak{K}$ mit den einfachen Bestandteilen $\mathfrak{X}_i$ vermöge der Berandungsmatrizen R_{ki}. Wir dürfen daher im folgenden $\mathfrak{X}$ als einfach voraussetzen oder, nach dem zweiten Wedderburnschen Struktursatz etwas allgemeiner, als vollen Matrizenring von s-reihigen Matrizen über einem Schiefkörper $\mathfrak{S}$. Der Vollständigkeit halber entwickeln wir auch die Gruppen- und Matrizentheorie in $\mathfrak{S}$, obwohl es sich dabei zum größten Teil um Bekanntes handelt [2]).

Unter einer Operatorgruppe über dem Ring $\mathfrak{X}$ als linksseitigem Operatorenbereich verstehen wir eine additiv geschriebene abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Rechnungsregeln

$$x(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = x\mathfrak{a} + x\mathfrak{b},$$
$$(x + y)\,\mathfrak{a} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{a},$$
$$1\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \quad x(y\mathfrak{a}) = (xy)\,\mathfrak{a}$$

($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ aus $\mathfrak{G}$). Analog kann natürlich $\mathfrak{X}$ Rechtsoperatorenbereich sein. $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ heißen linksunabhängig, wenn aus $x_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + x_r\mathfrak{a}_r = 0$ folgt $x_1 = \cdots = x_r = 0$, andernfalls, wenn also eine echte Linksrelation besteht, in der nicht $x_1 = \cdots = x_r = 0$ ist, linksabhängig. $x_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + x_r\mathfrak{a}_r$ heißt eine Linkskombination. Wir setzen nun $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ als Schiefkörper voraus. Wenn dann $x \neq 0$ ist, so folgt aus $x\mathfrak{a} = 0$, daß $x^{-1}x\mathfrak{a} = \mathfrak{a} = 0$. Ferner gilt

Satz 1. *$r + 1$ Linkskombinationen von r Elementen sind linksabhängig.*

---

[2]) Vgl. etwa B. L. v. d. Waerden, Moderne Algebra II, Berlin 1931, § 104/5.

Beweis. Für $r = 1$ ist das trivial. Es sei für $r - 1$ schon bewiesen. $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{r+1}$ seien Linkskombinationen von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$. Wenn $\mathfrak{a}_r$ in keiner Kombination $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{r+1}$ wirklich, d. h. mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten vorkommt, gibt es nach Induktionsannahme schon unter $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r$ eine echte Linksrelation. Andernfalls komme $\mathfrak{a}_r$ etwa in $\mathfrak{b}_{r+1}$ vor, $\quad \mathfrak{b}_{r+1} = x_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + x_r\mathfrak{a}_r, \; x_r \neq 0.$
Dann existieren geeignete $y_1, \ldots, y_r$ in $\mathfrak{S}$ so, daß $\quad \mathfrak{b}_1 - y_1\mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_r - y_r\mathfrak{b}_{r+1}$
Linkskombinationen von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r-1}$ sind. Nach Induktionsannahme besteht zwischen diesen Elementen eine echte Linksrelation, die auch als solche zwischen $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{r+1}$ aufgefaßt echt ist.

Wir betrachten nur solche Gruppen $\mathfrak{G}$, in denen eine Maximalzahl r linksunabhängiger Elemente existiert; r heißt der Rang von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G}$ von endlichem Range, so auch jede Untergruppe. Ist $\mathfrak{G}$ vom Range r und sind $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ aus $\mathfrak{G}$ linksunabhängig, so entsteht durch Hinzunahme eines neuen Elementes $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{G}$ ein abhängiges System,

$$x_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + x_r\mathfrak{a}_r + x\mathfrak{a} = 0, \; x \neq 0.$$

Durch Multiplikation mit x^{-1} ergibt sich eine Darstellung von $\mathfrak{a}$ als Linkskombination von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$. Diese Darstellung von $\mathfrak{a}$ ist eindeutig, da aus zwei verschiedenen Darstellungen des Nullelementes von $\mathfrak{G}$ eine Abhängigkeit von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ folgen würde. Ein System von Elementen aus $\mathfrak{G}$, aus denen sich jedes Element von $\mathfrak{G}$ eindeutig als Linkskombination darstellen läßt, heißt eine Basis von $\mathfrak{G}$. Eine Basis muß daher aus linksunabhängigen Elementen bestehen und zwar, nach Satz 1, aus genau r Elementen. Demnach ist jedes System von r unabhängigen Elementen von $\mathfrak{G}$ eine Basis und umgekehrt. Gruppen gleichen Ranges sind daher ersichtlich isomorph, und zwar operatorisomorph, Gruppen verschiedenen Ranges aber nicht. Mit anderen Worten:

Satz 2. *Der Rang ist eine charakteristische Invariante einer Operatorgruppe über* $\mathfrak{S}$.

Eine echte Untergruppe $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ hat einen Rang $r' < r$, denn jedes in $\mathfrak{G}$, aber nicht in $\mathfrak{G}'$ vorkommende Element $\mathfrak{a}$ ist sicher nicht durch Elemente von $\mathfrak{G}'$ darstellbar. Nimmt man ein solches Element $\mathfrak{a}$ zu einer Basis $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r'}$ von $\mathfrak{G}'$ hinzu, so entstehen $r' + 1$ unabhängige Elemente von $\mathfrak{G}$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens sieht man, daß man $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r'}$ zu einer Basis $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r'}, \ldots, \mathfrak{a}_r$ von $\mathfrak{G}$ ergänzen kann. Rechnet man zwei Elemente von $\mathfrak{G}$ in dieselbe Klasse, wenn ihre Differenz in $\mathfrak{G}'$ liegt, so bilden diese Klassen wieder eine Linksoperatorgruppe, die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$. Bei der eben angegebenen Wahl der Basis von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ erkennt man:

Satz 3. *Ist* $\mathfrak{G}'$ *vom Rang* r' *in* $\mathfrak{G}$ *vom Rang* r *enthalten, so hat die Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ *den Rang* $r - r'$.

Wir betrachten jetzt Matrizen $A = (a_{ik})$ vom Typus (m, n) mit Elementen aus $\mathfrak{S}$. Ist A m-reihig quadratisch und existiert in $\mathfrak{S}$ eine Linksinverse A_l und eine Rechtsinverse A_r mit $A_lA = AA_r = E$ (m-reihige Einheitsmatrix), so folgt $A_l = A_l(AA_r) = (A_lA)\,A_r = A_r$, es existiert also eine eindeutig bestimmte Inverse A^{-1} schlechthin. A heißt in diesem Fall regulär. Das Produkt regulärer Matrizen ist wieder regulär, denn $B^{-1}A^{-1}$ ist die Inverse des Produktes AB der beiden invertierbaren Matrizen A, B. Insbesondere sind die Matrizen der folgenden drei Typen, die wir die Henselschen Elementarmatrizen [3]) nennen wollen, regulär:

(1) $M_\nu(a)$ mit $a_{\nu\nu} = a \neq 0$, $a_{ii} = 1$ für $i \neq \nu$, $a_{ik} = 0$ sonst;
(2) $V_{\mu\nu}(\mu \neq \nu)$ mit $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} = 1$, $a_{ii} = 1$ für $i \neq \mu, \nu$, $a_{ik} = 0$ sonst;
(3) $Z_{\mu\nu}(b)$ $(\mu \neq \nu)$ mit $a_{\mu\nu} = b$, $a_{ii} = 1$, $a_{ik} = 0$ sonst.

[3]) L. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. Bearbeitet und fortgeführt von K. Hensel, Leipzig 1903, 21. Vorlesung.

Es ist

$$M_\nu^{-1}(a) = M_\nu(a^{-1}),\ V_{\mu\nu}^{-1} = V_{\mu\nu},\ Z_{\mu\nu}^{-1}(b) = Z_{\mu\nu}(-b)\,.$$

Multipliziert man A links mit m-reihigen bzw. rechts mit n-reihigen Elementarmatrizen, so kommt das hinaus auf die Multiplikation einer Zeile mit a, die Vertauschung zweier Zeilen oder die Addition einer mit b multiplizierten Zeile zu einer anderen, bzw. die entsprechenden Operationen unter den Spalten von A. Nennen wir A' und A äquivalent, wenn $A' = PAQ$ mit regulären P, Q, so kann man in bekannter Weise allein unter Benutzung der Henselschen Elementarmatrizen als links- und rechtsseitigen Faktoren A in die Normalform

$$P_0 A Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \Big\}\bar{r}$$

überführen. P_0, Q_0 sind dabei Produkte von Elementarmatrizen; die einzigen von Null verschiedenen Elemente der Normalform sind r Einsen in der Hauptdiagonale. Um zu zeigen, daß Matrizen mit verschiedenem $\bar{r}$ nicht äquivalent sind, benutzen wir die Operatorgruppen.

Die sämtlichen Rechtskombinationen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 x_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n x_n$ der Spalten $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ von A bilden eine Rechtsoperatorgruppe $\mathfrak{G}(A)$ über $\mathfrak{S}$ aus m-gliedrigen Spalten, die Spaltenrechtsgruppe von A. Der Rang r dieser Gruppe heiße der Rang von A. Nach Satz 1 ist das zugleich die Maximalzahl rechtsunabhängiger Spalten von A. Wir schreiben kurz $\mathfrak{a} = A\mathfrak{x}$. Ist Q n-reihig regulär, so ist $\mathfrak{a} = (AQ)\,(Q^{-1}\mathfrak{x}) = (AQ)\,\mathfrak{x}'$, ferner $(AQ)\mathfrak{y} = A(Q\mathfrak{y}) = A\mathfrak{y}' = \mathfrak{a}'$. Danach ist $\mathfrak{G}(A) = \mathfrak{G}(AQ)$. Ist P m-reihig quadratisch, so besteht $\mathfrak{G}(PA)$ wegen $(PA)\mathfrak{x} = P(A\mathfrak{x}) = P\mathfrak{a}$ aus allen $P\mathfrak{a}$; ist P außerdem regulär, so ist die Beziehung zwischen den $\mathfrak{a} = P^{-1}(P\mathfrak{a})$ und den $P\mathfrak{a}$ eineindeutig, und zwar isomorph. $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{G}(PA)$ sind also operatorisomorph. Zusammen ergibt sich, daß äquivalente Matrizen operatorisomorphe Spaltenrechtsgruppen und insbesondere also denselben Rang besitzen. Man kann daher den Gruppentypus und den Rang aus den oben angegebenen Normalformen entnehmen. Man erhält, daß $\mathfrak{G}(A)$ den Rang $\bar{r}$ hat, daß also $r = \bar{r}$ ist. Daher sind zwei Normalformen mit verschiedenem r nicht äquivalent; A' und A sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie im Rang übereinstimmen. Ist A n-reihig quadratisch und vom Range n, so ist A Produkt von Henselschen Elementarmatrizen, also regulär. Umgekehrt ist für eine reguläre n-reihige Matrix A wegen $AA^{-1} = E$ die Gruppe $\mathfrak{G}(A)$ die Gruppe aller n-reihigen Spalten; A ist also vom Rang n. Damit ist bewiesen:

Satz 4. *Der Rang ist eine charakteristische Invariante für die Klassen äquivalenter Matrizen. Für n-reihig quadratische Matrizen sind die Begriffe „regulär", „vom Rang n", „Produkt von Henselschen Elementarmatrizen" gleichbedeutend.*

Die Lösungen des linearen homogenen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k = 0, \quad \text{kurz} \quad A\mathfrak{y} = 0\,,$$

bilden eine Rechtsoperatorgruppe $\mathfrak{N}$ aus n-gliedrigen Spalten $\mathfrak{y}$. Die Faktorgruppe von $\mathfrak{N}$ in der Gruppe aller n-gliedrigen Spalten vom Range n ist offenbar zu $\mathfrak{G}(A)$ operatorisomorph: Alle $\mathfrak{x}$ derselben Klasse nach $\mathfrak{N}$ liefern dieselbe Spalte $A\mathfrak{x}$. Nach Satz 3 ist daher $\mathfrak{N}$ vom Range $n - r$.

Die sämtlichen Linkskombinationen der Zeilen von A bilden eine Linksoperatorgruppe über $\mathfrak{S}$, die Zeilenlinksgruppe von A. Durch ganz entsprechende Schlüsse wie

oben ergibt sich, daß diese Gruppe den Rang r hat und daß A also r linksunabhängige Zeilen besitzt. Ferner folgt, daß das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ik} = 0, \quad \text{kurz} \quad \mathfrak{y}A = 0,$$

genau $m - r$ linksunabhängige Lösungen hat. Ebenso erkennt man nach dem Vorhergehenden sofort: Reguläre Matrizen haben eindeutige Inverse und sind weder rechte noch linke Nullteiler. Nichtreguläre Matrizen haben weder Links- noch Rechtsinverse und sind sowohl rechte wie linke Nullteiler. Wir fassen zusammen:

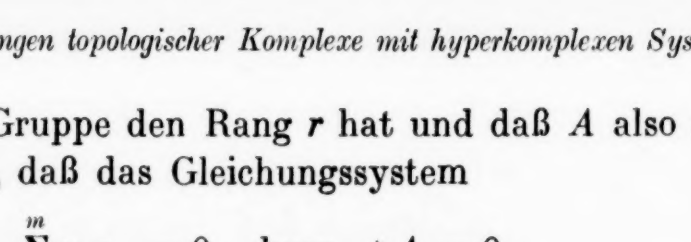
Satz 5. *Der Rang r einer Matrix A vom Typus (m, n) ist die Maximalzahl rechtsunabhängiger Spalten und die Maximalzahl linksunabhängiger Zeilen von A. Das Gleichungssystem $A\mathfrak{x} = 0$ hat genau $n - r$ rechtsunabhängige, das System $\mathfrak{x}A = 0$ genau $m - r$ linksunabhängige Lösungen.*

Die Anzahl der linksunabhängigen Spalten und die der rechtsunabhängigen Zeilen, die Zahl der unabhängigen Lösungen von $\Sigma x_k a_{ik} = 0$ und $\Sigma a_{ik} y_i = 0$ wird analog durch den Rang r' der transponierten Matrix A' zu A bestimmt. Es ist für nichtkommutative $\mathfrak{S}$ im allgemeinen $r' \neq r$, wovon man sich durch einfachste Beispiele, etwa im Quaternionenkörper, sofort überzeugt. — Die Normalform für die Klassen äquivalenter Matrizen zeigt, daß der Rang einer Matrix von dem Schiefkörper, in dem sie betrachtet wird, unabhängig ist. — Über das Verhalten des Ranges bei Produktbildung gilt:

Satz 6. *Ist die Spaltenzahl m von A_1 gleich der Zeilenzahl von A_2, so gilt für die Ränge r_1, r_2, r von $A_1, A_2, A = A_1 A_2$*

$$1)\ r \leqq r_1, r_2, \qquad 2)\ r \geqq r_1 + r_2 - m.$$

Beweis. Der erste Teil ergibt sich nach Satz 1 unmittelbar aus der Definition des Ranges, denn die Spalten (bzw. Zeilen) von A gehören sämtlich der Spaltenrechtsgruppe von A_1 (bzw. der Zeilenlinksgruppe von A_2) an. Zum Beweise des zweiten Teiles [4]) schreiben wir die Voraussetzung in der Form $(PA_1Q)\,(Q^{-1}A_2) = PA$ mit regulären, also den Rang nicht ändernden Matrizen P, Q, die so gewählt seien, daß PA_1Q die Normalform wird. Dann ergibt sich das Bild:

$(PA_1Q)\,(Q^{-1}A_2) =$ 

$= PA_2,$

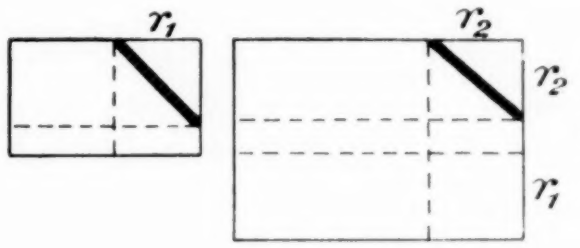
wobei in dem nichtschraffierten Gebiet Nullen stehen. Für r_2, die Maximalzahl linksunabhängiger Zeilen von $Q^{-1}A_2$, folgt so: $r_2 \leqq (m - r_1) + r$, und das ist die Behauptung.

Ist $A_1 A_2 = 0$, so kann man durch reguläre P, Q, R die Matrizen PA_1Q^{-1}, QA_2R^{-1} gleichzeitig auf eine etwas modifizierte Normalform bringen, die wir später brauchen. Zunächst kann man P und Q so wählen, daß PAQ^{-1} außer einer ganz mit Einsen besetzten rechten Parallelen zur Hauptdiagonale nur Nullen enthält. Wegen $(PA_1Q^{-1})\,(QA_2 = 0$ sind dann die letzten r_1 Zeilen von QA_2 Null. Durch passende Wahl von R und Abänderung von Q derart, daß die zusammensetzenden Henselschen Elementarmatrizen nur die ersten $m - r_1$ Zeilen von QA_2, also die ersten $m - r_1$ Spalten von PAQ^{-1} verändern, kann man QA_2R^{-1} in die gleiche Gestalt setzen, so daß sich folgendes Bild ergibt:

---

[4]) J. J. Sylvester, Coll. Works, Vol. IV, S. 133 ff.

$$(PA_1Q^{-1})\,(QA_2R^{-1}) =$$



$$= 0;$$

dabei bedeuten die fetten Linien Einsen; sonst bestehen die Matrizen nur aus Nullen. —

Jetzt sei $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ ein Ring, der sich als volle Matrixalgebra aller s-reihigen quadratischen Matrizen mit Elementen aus dem Schiefkörper $\mathfrak{S}$ darstellen läßt. Die Skalarmatrizen, die Diagonalmatrizen mit lauter gleichen Diagonalelementen, bilden dann einen zu $\mathfrak{S}$ isomorphen Schiefkörper in $\mathfrak{A}$, den wir ebenfalls mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen. Wir betrachten (m, n)-reihige Matrizen $A = (a_{ik})$ aus $\mathfrak{A}$. Setzen wir für die a_{ik} die darstellenden Matrizen ein, so wird A eineindeutig eine (sm, sn)-reihige Matrix A^* zugeordnet. Der Menge aller A entspricht die Menge aller A^*, dem Produkt AB entspricht, da man Matrizen bekanntlich „kästchenweise" ausmultiplizieren darf, das Produkt A^*B^*. Daß ein Element a von $\mathfrak{A}$ ein Reziprokes besitzt, bedeutet, daß die zugehörige s-reihige Matrix a^* regulär ist; eine Matrix A besitzt dann und nur dann eine Reziproke, wenn A^* regulär ist. Ordnet man daher der Matrix A den Rang r von A^* in $\mathfrak{S}$ — für den $r \leqq sm, sn$ gilt — zu, so ist r von der speziellen Darstellung von $\mathfrak{A}$ unabhängig, und man erkennt ohne weiteres:

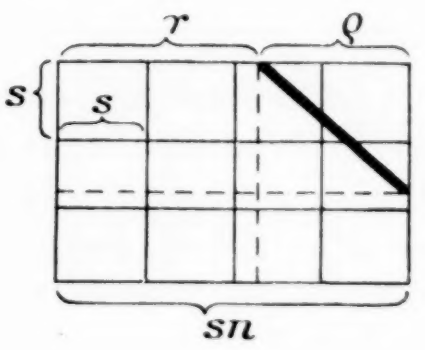
Satz 7. *Matrizen aus $\mathfrak{A}$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie gleichen Rang haben.*

Insbesondere wird so jedem Element a von $\mathfrak{A}$ ein Rang $\leqq s$ zugeordnet; a ist dann und nur dann Nullteiler, wenn der Rang $< s$ ist.

Sei $\mathfrak{G}$ eine Operatorgruppe mit $\mathfrak{A}$ als linksseitigem Operatorenbereich und endlich vielen Erzeugenden $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$. Bezeichnen wir eine Relation $x_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + x_n\mathfrak{a}_n = 0$ mit $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{A}$ durch die Zeile $\mathfrak{x}$, so bilden diese $\mathfrak{x}$ ebenfalls eine Linksoperatorgruppe über $\mathfrak{A}$. Setzt man für $x_1, \ldots, x_n$ die darstellenden Matrizen ein, so werden die $\mathfrak{x}$ zu (s, sn)-reihigen Matrizen, und die Menge aller sn-gliedrigen Zeilen, die darin auftreten, bildet ersichtlich eine Linksoperatorgruppe über $\mathfrak{S}$, etwa vom Range ϱ. Die Zeilen $\mathfrak{x}_i$, zur Matrix X übereinander geordnet, mögen ein Erzeugendensystem für diese Gruppe bilden. Führt man an Stelle der $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ eine neue Basis ein,

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{a}_1\\ \vdots\\ \mathfrak{a}_n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\mathfrak{a}'_1\\ \vdots\\ \mathfrak{a}'_n\end{pmatrix}$$

mit regulärem sn-reihigen P, so lautet die entsprechende Matrix XP. Ferner ist mit X auch QX Erzeugendensystem für die Relationengruppe, wenn Q regulär ist. Wählt man P und Q so, daß QXP Normalform wird, so ergibt sich dafür etwa folgendes Bild, in dem wieder die fette Linie Einsen bedeutet:



Daraus liest man ab: Relationen werden genau durch diejenigen (s, sn)-reihigen Matrizen $\mathfrak{x}$ gegeben, die höchstens in den ϱ letzten Spalten mit von Null verschiedenen Elementen besetzt sind. Ist ε_i die s-reihige Matrix, die an der i-ten Stelle der Hauptdiagonale eine Eins und sonst lauter Nullen enthält und ersetzt man das Erzeugendensystem $\mathfrak{a}_k$ durch $\mathfrak{b}_\nu = \varepsilon_i \mathfrak{a}_k$ $(i = 1, \ldots, s;\ k = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, sn)$, so erzeugen die $\mathfrak{b}_\nu$ mit $\nu = 1, \ldots, sn - \varrho$ lauter untereinander operatorisomorphe Gruppen $\{\mathfrak{b}_\nu\}$, die zur Gruppe aller s-gliedrigen Spalten isomorph sind (einfache Linksideale von $\mathfrak{A}$). $\mathfrak{G}$ selbst ist direkte Summe der $\{\mathfrak{b}_\nu\}$ und läßt sich demgemäß operatorisomorph darstellen als Gruppe aller (s, r)-reihigen Matrizen mit Elementen aus $\mathfrak{S}$. Die Anzahl $r = sn - \varrho$ der Summanden heißt der Rang von $\mathfrak{G}$. Da die Maximalzahl der über $\mathfrak{S}$ linksunabhäniggen Elemente von $\mathfrak{G}$ gleich sr ist, ist r eine Invariante von $\mathfrak{G}$. Die $\{\mathfrak{b}_\nu\}$ haben den Rang 1, besitzen also außer der Nullgruppe keine echten Untergruppen. Sie heißen daher einfache Gruppen. Zusammenfassend können wir sagen:

Satz 8. *Eine Linksoperatorgruppe $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$ ist die direkte Summe von r einfachen Gruppen und operatorisomorph zur Gruppe aller (s, r)-reihigen Matrizen aus $\mathfrak{S}$; der Rang r ist ihre einzige Invariante.*

Wir kehren zur Überdeckung von $\mathfrak{R}$ zurück und setzen $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ zunächst als Schiefkörper voraus. Dann liest man aus den beiden Gleichungen

$$\mathbf{R}(\mathfrak{x}_i^k) = R_{k-1}\mathfrak{x}_i^{k-1}, \quad \mathbf{R}(\mathfrak{x}_i^{k+1}) = R_k \mathfrak{x}_i^k$$

ab: Geschlossene k-dimensionale Ketten $\mathfrak{x}^k = \Sigma y_i \mathfrak{x}_i^k$ erhält man genau durch alle Zeilen $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_{\alpha_k})$ mit $\mathfrak{y} R_{k-1} = 0$. Bezeichnet also r_k den Rang von R_k, so ist $\mathfrak{G}_k$ eine Gruppe vom Rang $\alpha_k - r_{k-1}$. Berandende Ketten ergeben sich durch alle $\mathfrak{z} R_k$, also alle Zeilen der Zeilenlinksgruppe von R_k $\mathfrak{R}_k$ ist daher eine Gruppe vom Range r_k. Es folgt nach Satz 3, wenn man $r_{-1} = r_n = 0$ setzt:

Satz 9. *Die Homologiegruppe $\mathfrak{H}_k$ einer Überdeckung mit der Koordinatengruppe $\mathfrak{S}$ ist eine Operatorgruppe vom Range $p_k = \alpha_k - r_{k-1} - r_k$ (k-te Bettische Zahl dieser Überdeckung); diese Zahl ist ihre einzige Invariante.*

Für die explizite Aufstellung der Ketten von $\mathfrak{G}_k$ und $\mathfrak{R}_k$ verweisen wir auf den folgenden allgemeineren Fall. — Sei jetzt $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ das oben betrachtete volle s-reihige Matrizensystem über dem Schiefkörper $\mathfrak{S}$. Dann sind $\mathfrak{G}_k$, $\mathfrak{R}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ Operatorgruppen über $\mathfrak{A}$. Geht man von den Berandungsmatrizen R_k zu den entsprechenden $(s\alpha_{k+1}, s\alpha_k)$-reihigen Matrizen R_k^* über, so erkennt man ganz analog wie früher: $\mathfrak{G}_k$ ist vom Range $s\alpha_k - r_{k-1}$, $\mathfrak{R}_k$ vom Rang r_k. Die Zahl der linksunabhängigen Elemente über $\mathfrak{S}$ ist entsprechend $s(s\alpha_k - r_{k-1})$ und sr_k, für die Gruppe $\mathfrak{H}_k$ also $s(s\alpha_k - r_{k-1} - r_k)$, der Rang von $\mathfrak{H}_k$ ist also $s\alpha_k - r_{k-1} - r_k$.

Benutzt man für die R_k^* die im Anschluß an Satz 6 angegebenen Normalformen,

$$R_{k-1}^* = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{s\alpha_{k-1}} \\ \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \right\}_{s\alpha_k} \end{array} \Bigg\}_{r_{k-1}},$$

so kann man daraus ohne weiteres die Zugehörigkeit einer Kette zu $\mathfrak{G}_k$ bzw. $\mathfrak{R}_k$ ablesen: $\mathfrak{x}^k = \Sigma y_i \mathfrak{x}_i^k$ gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{G}_k$, wenn $(y_1, \ldots, y_{\alpha_k})$, als $(s, s\alpha_k)$-reihige Matrix geschrieben, höchstens in den $s\alpha_k - r_{k-1}$ letzten Spalten mit von Null verschiedenen Elementen besetzt ist; $\mathfrak{x}^{k-1} = \Sigma z_i \mathfrak{x}_i^{k-1}$ gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{R}_{k-1}$, wenn $(z_1, \ldots, z_{\alpha_{k-1}})$, als $(s, s\alpha_{k-1})$-reihige Matrix geschrieben, höchstens in den r_{k-1} letzten Spalten mit von Null verschiedenen Elementen besetzt ist. Also:

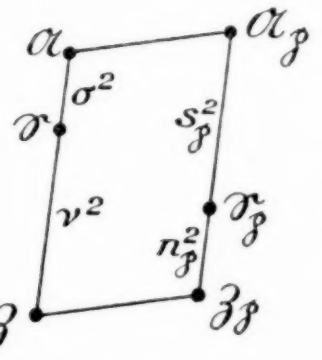
Satz 10. *Die Homologiegruppe $\mathfrak{H}_k$ einer Überdeckung mit der Koordinatengruppe $\mathfrak{A}$ ist eine Operatorgruppe vom Rang $r_k = s\alpha_k - r_{k-1} - r_k$ (k-te Bettische Zahl dieser Überdeckung); diese Zahl ist ihre einzige Invariante.*

Jetzt sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ eine Maximalordnung einer halbeinfachen Algebra $\mathfrak{A}$ endlichen Ranges über dem rationalen Zahlkörper [5]). $\mathfrak{o}$ zerlegt sich entsprechend der Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in eine direkte Summe einfacher Teilalgebren ebenfalls in eine direkte Summe

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \cdots + \mathfrak{o}_v.$$

Die Berandungsmatrizen R_k einer vorgelegten Überdeckung von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{o}$ zerlegen sich analog in v Summanden, die je in $\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_v$ liegen. Daher kommt die Überdeckung von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{o}$ auf die von einander unabhängigen entsprechenden Überdeckungen von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_v$ hinaus. Wir setzen daher $\mathfrak{A}$ im folgenden als einfach voraus.

Das Zentrum von $\mathfrak{A}$ ist dann ein algebraischer Zahlkörper $\mathfrak{Z}$ endlichen Grades, und $\mathfrak{A}$ ist als volles σ-reihiges Matrizensystem über einem in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Schiefkörper $\mathfrak{S}$ vom Range ν^2 über $\mathfrak{Z}$ darstellbar. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$ die zugehörige $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung von $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ die Erweiterung von $\mathfrak{A}$ vom Grundkörper $\mathfrak{Z}$ auf den Grundkörper $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ ebenfalls einfach mit $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$ als Zentrum und als volles $s_\mathfrak{p}$-reihiges Matrizensystem über einem in $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ enthaltenen Schiefkörper $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ vom Range $n_\mathfrak{p}^2$ über $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$ darstellbar [6]). Es ist $\nu^2 = n_\mathfrak{p}^2 \varkappa_\mathfrak{p}^2$ mit ganzzahligem $\varkappa_\mathfrak{p}$. Das Einselement von $\mathfrak{A}$ hat den Rang σ in $\mathfrak{A}$, als Element von $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ hat es jedoch den Rang $s_\mathfrak{p} = \sigma\varkappa_\mathfrak{p}$. Allgemein erkennt man,



zunächst für reguläre Matrizen, dann auf Grund der Normalform allgemein, daß eine Matrix aus $\mathfrak{A}$ vom Rang r als Matrix in $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ aufgefaßt den Rang $r\varkappa_\mathfrak{p}$ hat. Ist $\mathfrak{o}$ eine Maximalordnung von $\mathfrak{A}$, so ist die $\mathfrak{p}$-adische Grenzmenge $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ eine Maximalordnung von $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$. $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ stellt sich als Menge aller $s_\mathfrak{p}$-reihigen Matrizen aus Elementen der (einzigen) Maximalordnung $o_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ dar, wenn man, wie es im folgenden geschehen soll, $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ unter allen durch innere Automorphismen von $\mathfrak{A}$ daraus hervorgehenden Schiefkörpern geeignet wählt [7]). — Wir untersuchen nun eine gegebene durch die Berandungsmatrizen R_k aus $\mathfrak{o}$ festgelegte Überdeckung von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{o}$ dadurch, daß wir, für jedes einzelne $\mathfrak{p}$ gesondert, diejenige Überdeckung von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ untersuchen, die durch dieselben Berandungsmatrixen R_k geliefert wird. Zu diesem Zweck schicken wir einige Bemerkungen über die Matrizen- und Operatorgruppentheorie über $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ voraus.

π sei ein Primelement von $o_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = (\pi)^{n_\mathfrak{p}}$; die Restklassenzahl mod π bezeichnen wir mit q. $\mathfrak{G}$ sei eine Linksoperatorgruppe über $o_\mathfrak{p}$ mit endlich vielen Erzeugenden $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$. Eine Relation $x_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + x_m\mathfrak{a}_m = 0$ mit $x_1, \ldots, x_m$ aus $o_\mathfrak{p}$ bezeichnen wir kurz durch die Zeile $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. Die Menge aller dieser $\mathfrak{x}$ bildet eine Linksoperatorgruppe über $o_\mathfrak{p}$ aus m-gliedrigen Zeilen, von der man, da $o_\mathfrak{p}$ ein Hauptidealring mit dem

[5]) E. Artin, Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen, Abh. Mathem. Sem. Hamburg **5** (1927), § 1.

[6]) Über die im folgenden benutzten Begriffe und Sätze über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper vgl. H. Hasse, Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931).

[7]) Siehe Hasse, a. a. O.[6]), Satz 47.

einzigen Primideal (π) ist, in üblicher Weise zeigt, daß sie eine Basis von etwa l Zeilen besitzt. Diese mögen zu der (l, m)-reihigen Relationenmatrix X vereinigt werden. Ist Q eine l-reihige unimodulare Matrix, d. h. eine solche reguläre Matrix, die samt ihrer Inversen in $o_\mathfrak{p}$ liegt, so ist auch QX eine Relationenmatrix. Geht man von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ mittels einer unimodularen Matrix P, ebenso wie oben, zu einem anderen Erzeugendensystem von m Elementen von $\mathfrak{G}$ über, so lautet die entsprechende Relationenmatrix QXP. Nun kann man in bekannter Weise P und Q unimodular als Produkte geeigneter Henselscher Elementarmatrizen so wählen, daß

$$X_0 = QXP = \begin{pmatrix} \pi^{e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \pi^{e_\varrho} \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqq e_1 \leqq \cdots \leqq e_\varrho ,$$

ist, wo ϱ der Rang von X ist [8]). Hiernach übersieht man in den neuen Erzeugenden die Relationen und damit die Gruppe $\mathfrak{G}$ völlig: $\mathfrak{G}$ ist direkte Summe von $r = m - \varrho$ zu $o_\mathfrak{p}$ isomorphen Teilgruppen und von ϱ zu den Restklassengruppen von $o_\mathfrak{p}$ mod $\pi^{e_1}, \ldots, \pi^{e_\varrho}$ isomorphen Teilgruppen. Die Zahl r heißt der Rang von $\mathfrak{G}$, die von Null verschiedenen unter den $e_1, \ldots, e_\varrho$ heißen die Elementarteiler von $\mathfrak{G}$. Beides sind Invarianten von $\mathfrak{G}$: Einerseits gibt es r über $o_\mathfrak{p}$ linksunabhängige Elemente in $\mathfrak{G}$, und nach dem ohne weiteres auf diesen Fall zu übertragenden Satz 1 auch nicht mehr; r ist also die Maximalzahl linksunabhängiger Elemente von $\mathfrak{G}$. Andererseits ist die Lösungsanzahl für die Gleichung $\pi^x x = 0$ in $\mathfrak{G}$ offenbar gleich $q^{f_1 + \cdots + f_x}$, wenn f_i die Anzahl der $e_1, \ldots, e_\varrho$ bezeichnet, welche $\geqq i$ sind $(i = 1, 2, \ldots)$; damit sind die f_i und zugleich die $e_i > 0$ invariant charakterisiert.

Eine beliebige (l, m)-reihige Matrix X aus $o_\mathfrak{p}$ bestimmt rückwärts eindeutig eine Linksoperatorgruppe über $o_\mathfrak{p}$, deren Relationenmatrix sie ist, nämlich die Faktorgruppe der von allen Linkskombinationen der Zeilen von X gebildeten Gruppe in der Gruppe aller l-gliedrigen Zeilen aus $o_\mathfrak{p}$. Wir sprechen von der zu X gehörigen Operatorgruppe. Nennt man zwei (l, m)-reihige Matrizen aus $o_\mathfrak{p}$ äquivalent, wenn sie durch unimodulare l-reihige vordere und m-reihige hintere Faktoren ineinander übergeführt werden können, so besitzen nach obigem äquivalente Matrizen operatorisomorphe Gruppen. Nun ist jede Matrix X zu einer Normalform X_0 der angegebenen Art äquivalent. Die Invarianten der zugehörigen Gruppe lassen sich also aus der Normalform ablesen. Danach ist $m - \varrho$ ihr Rang und die von Null verschiedenen unter den $e_1, \ldots, e_\varrho$ sind ihre Elementarteiler; die Invarianten bestimmen also die Normalform völlig. Wenn daher umgekehrt zwei (l, m)-reihige Matrizen operatorisomorphe zugehörigen Gruppen besitzen, so lassen sie sich in dieselbe Normalform überführen, sie sind also äquivalent. Isomorphie der zugehörigen Gruppen ist also die notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier solcher Matrizen. Nennt man die volle Reihe $e_1, \ldots, e_\varrho$ die Elementarteiler der Matrix X, so kann man auch sagen, daß die Gleichheit der Elementarteiler für die Äquivalenz notwendig und hinreichend ist. Wir fassen zusammen:

Satz 11. *Der Rang und die Elementarteiler sind die einzigen Invarianten einer Operatorgruppe über $o_\mathfrak{p}$. Matrizen aus $o_\mathfrak{p}$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie in den Elementarteilern übereinstimmen.*

Die Matrizen- und Operatorgruppentheorie über $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ergibt sich daraus in ganz analoger Weise wie oben die entsprechende Theorie für $\mathfrak{A}$ aus der von $\mathfrak{S}$, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ die Menge aller s-reihigen Matrizen mit Elementen aus $o_\mathfrak{p}$ ist. Jeder (l, m)-reihigen Matrix X aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ist eine $(s_\mathfrak{p} l, s_\mathfrak{p} m)$-reihige Matrix X^* aus $o_\mathfrak{p}$ eineindeutig

[8]) Siehe etwa v. d. Waerden, a. a. O.[2]), § 106/7.

zugeordnet. Ist ϱ der Rang von X^*, so kommen der Matrix X ϱ Elementarteiler $e_1, \ldots, e_\varrho$ zu, welche die Äquivalenzklasse von X bestimmen. In jeder Äquivalenzklasse kommt eine Normalform X_0 der angegebenen Form vor. — Eine Linksoperatorgruppe $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ mit endlich vielen Erzeugenden ist direkte Summe von r „einfachen Gruppen" (einfache Linksideale), die isomorph dargestellt werden durch die Linksoperatorgruppe aller $s_\mathfrak{p}$-gliedrigen Spalten aus $o_\mathfrak{p}$, und von einer endlichen Anzahl t von endlichen Gruppen, die isomorph dargestellt werden durch $s_\mathfrak{p}$-gliedrige Spalten aus $o_\mathfrak{p}$, die modulo gewissen Potenzen $\pi^{e_i} (i = 1, \ldots, t)$ gerechnet werden. r heißt der Rang, die Zahlen e_i heißen die Elementarteiler von $\mathfrak{G}$.

Satz 12. *Der Rang und die Elementarteiler sind die einzigen Invarianten einer Operatorgruppe über* $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$.

Wir kehren zur Überdeckung von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ zurück. $\mathfrak{G}_k$, $\mathfrak{R}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ sind dann Linksoperatorgruppen über $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Der Rang von $\mathfrak{H}_k$ heißt die k-te *Bettische Zahl* der Überdeckung, die Elementarteiler von $\mathfrak{H}_k$ heißen ihre k-dimensionalen *Torsionsexponenten.* Man kann diese Invarianten aus den Rängen ϱ_k und den Elementarteilern der Berandungsmatrizen R_k wie folgt ablesen. Man gehe zu den entsprechenden $(s_\mathfrak{p}\alpha_{k+1}, s_\mathfrak{p}\alpha_k)$-reihigen Matrizen R_k^* über und führe sie, ganz analog wie bei der Überdeckung mit $\mathfrak{A}$, gleichzeitig in die Normalform über (siehe die schematische Darstellung vor Satz 10; die fette Linie bedeutet jetzt die Reihe der Elementarteiler-Glieder $\pi^{e_1}, \ldots, \pi^{e_\varrho}$ von R_k). Daraus liest man ohne weiteres ab: $\mathfrak{x}_k = \Sigma y_i \mathfrak{x}_i^k$ gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{G}_k$, wenn $(y_1, \ldots, y_{\alpha_k})$, als $(s_\mathfrak{p}, s_\mathfrak{p}\alpha_k)$-reihige Matrix geschrieben, höchstens in den $s_\mathfrak{p}\alpha_{k-1} - \varrho_k$ letzten Spalten mit von Null verschiedenen Elementen besetzt ist. $\mathfrak{x}^k = \Sigma z_i \mathfrak{x}_i^k$ gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{R}_k$, wenn $(z_1, \ldots, z_{\alpha_k})$, als $(s_\mathfrak{p}, s_\mathfrak{p}\alpha_k)$-reihige Matrix geschrieben, höchstens in den ϱ_k letzten Spalten, und zwar in der $(s_\mathfrak{p}\alpha_k - \varrho_k + i)$-ten Spalte mit durch π^{e_i} teilbaren Elementen besetzt ist $(i = 1, \ldots, \varrho_k)$. Daraus ergibt sich ohne weiteres:

Satz 13. *Die Homologiegruppe* $\mathfrak{H}_k$ *einer Überdeckung mit* $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ *ist eine Operatorgruppe vom Rang* $p_k = s_\mathfrak{p}\alpha_k - \varrho_{k-1} - \varrho_k$ (*k-te Bettische Zahl der Überdeckung*). $\mathfrak{H}_n$ *hat keine Elementarteiler,* $\mathfrak{H}_k (k < n)$ *hat als Elementarteiler die von Null verschiedenen Elementarteiler der Berandungsmatrix* R_k (*k-dimensionale Torsionsexponenten*). *Dies sind ihre einzigen Invarianten.*

Die $\mathfrak{p}$-Potenzen mit den Exponenten $\frac{e_1}{n_\mathfrak{p}}, \ldots, \frac{e_{\varrho_k}}{n_\mathfrak{p}}$ hat man sinngemäß als k-dimensionale Torsionsideale der Überdeckung zu bezeichnen.

Bei einer Überdeckung von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{o}$ vermöge der Berandungsmatrizen R_k vom Range r_k erhält man auf diese Weise für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{Z}$ und für jede Dimension k $\varrho_k = r_k \varkappa_\mathfrak{p}$ Torsionsideale als Invarianten. Das sind allerdings nicht die einzigen Invarianten der Überdeckung, wie schon der Fall einer Maximalordnung $\mathfrak{o}$ eines kommutativen Zahlkörpers endlichen Grades zeigt, in dem bekanntlich, nach den Resultaten von Steinitz [9]), außer den Elementarteilern noch gewisse Idealklassen als Invarianten einer Operatorgruppe auftreten.

Wir wollen noch zeigen, daß nur endlich viele Torsionsideale einer Überdeckung von 1 verschieden sind. Dazu ist zu zeigen, daß eine (l, m)-reihige Matrix A aus $\mathfrak{o}$ in allen $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ nur endlich viele Elementarteiler $\neq 0$ besitzt. Nennt man zwei m-reihig quadratische Matrizen X und X' aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ kongruent mod A, wenn $X - X' = AY$ mit Y aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ gilt, so bilden die Restklassen mod A eine abelsche Gruppe. Geht man von A zu der zugehöri-

[9]) E. Steinitz, Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern, Math. Ann. **71** (1912), **72** (1912).

gen $(s_\mathfrak{p} l, s_\mathfrak{p} m)$-reihigen Matrix A^* aus $o_\mathfrak{p}$ über, so erkennt man an Hand der Normalform für A^*, daß in der Restklassengruppe mod A dann und nur dann Elemente endlicher Ordnung außer dem Nullelement existieren, wenn mindestens ein Elementarteiler von A von Null verschieden ist. Führt man ganz analog in $\mathfrak{o}$ unter allen m-reihig quadratischen Matrizen Restklassen mod A ein, so ergibt sich eine abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden, da $\mathfrak{o}$ selbst endlich viele Erzeugende besitzt [10]). Es gibt also ein ganz-rationales g_1 derart, daß das g_1-fache jeder Restklasse endlicher Ordnung die Nullklasse ist. Für jedes $\mathfrak{p} \nmid g_1$, behaupten wir, gibt es in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ außer der Nullklasse keine Klasse mod A von endlicher Ordnung; für alle diese $\mathfrak{p}$ hat also A keine von Null verschiedenen Elementarteiler.

Sei nämlich $\mathfrak{p}$ eins dieser Primideale und B aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ mod A von endlicher Ordnung. Es existiert also ein ganz-rationales $m \neq 0$ so, daß

$$mB = AY \qquad (Y \text{ aus } \mathfrak{o}_\mathfrak{p})$$

ist. Die Menge aller ganzen Zahlen aus $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$ mit dieser Eigenschaft bildet ein Ideal $\mathfrak{p}^v$ von $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$. Die Behauptung lautet $v = 0$. Da $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ die $\mathfrak{p}$-adische Grenzmenge von $\mathfrak{o}$ ist, gestattet Y eine Darstellung $Y = Y_\lambda + Y'_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ mit Y_λ aus $\mathfrak{o}$ und Matrizen Y'_λ aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, deren Koordinaten bei einer Darstellung durch eine feste $\mathfrak{Z}$-Basis ω_i $(i = 1, \ldots, \sigma^2 v^2)$ von $\mathfrak{o}$ für hinreichend große λ durch eine beliebig hohe $\mathfrak{p}$-Potenz teilbar sind. Nach dem zweiten Ordnungspostulat für $\mathfrak{o}$ [10]) gibt es in $\mathfrak{Z}$ ein ganzes h so, daß alle $h\omega_i$ in $\mathfrak{o}$, also auch in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ liegen. Wählt man λ so groß, daß jene $\mathfrak{p}$-Potenz größer ist, als die in mh enthaltene, so kann man $Y'_\lambda = mY''_\lambda$ mit Y''_λ aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ setzen. Dann wird

$$mB = A(Y_\lambda + mY''_\lambda),\ m(B - AY''_\lambda) = AY_\lambda.$$

Danach liegt $B' = B - AY''_\lambda$ in $\mathfrak{A}$. Wir zeigen, daß es ein zu $\mathfrak{p}$ primes ganzes g in $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$ so gibt, daß $gB' \equiv 0 \bmod A$ ist. Dann ist auch $gB \equiv 0 \bmod A$, g gehört also zu $\mathfrak{p}^v$; da g zu $\mathfrak{p}$ prim ist, folgt $v = 0$, wie behauptet.

Da B' Matrix aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ist, kann man nämlich $B' = B_\lambda + B'_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ setzen, wo B_λ in $\mathfrak{o}$ liegt und B'_λ aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ für alle hinreichend großen λ koordinatenweise durch eine beliebig hohe $\mathfrak{p}$-Potenz teilbar ist. Daraus erkennt man, ganz analog wie eben, daß es eine zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl g_2 in $\mathfrak{Z}$ so gibt, daß für geeignetes λ $g_2 B'_\lambda$ eine Matrix aus $\mathfrak{o}$ wird. Dasselbe gilt also für $g_2 B'$. Da B' und somit auch $g_2 B'$ mod A von endlicher Ordnung ist, folgt $g_1 g_2 B' \equiv 0 \bmod A$. $g = g_1 g_2$ ist zu $\mathfrak{p}$ prim und leistet in der Tat das Gewünschte. Wir fassen zusammen:

Satz 14. *Einer Überdeckung von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{o}$ kommen für jede Dimension k und für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{Z}$ $\varrho_k = r_k \varkappa_\mathfrak{p}$ Torsionsideale als Invarianten zu, von denen insgesamt nur endlich viele von 1 verschieden sind.*

---

[10]) Artin, a. a. O.[5]), § 1.

Eingegangen 3. April 1935.

Über das Verhalten der Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung hinsichtlich ihrer Gruppe.

Von *Udo Wegner* in Darmstadt.

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich mittels einiger elementarer Eigenschaften eines Galoisfeldes gezeigt: Ist

$$f(x) = 0$$

eine ganzzahlige, normierte Gleichung und p eine nicht in ihrer Diskriminante aufgehende Primzahl, so bestimmt sich das kleinste gemeinsame Vielfache m der Grade der mod. p irreduziblen Faktoren von $f(x)$ als kleinster Exponent der Kongruenz

$$p^m \equiv 1 \pmod{P};$$

dabei ist P die Periode der Potenzsummen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ der Wurzeln von $f(x) = 0$, die im Falle, daß p nicht im absoluten Gliede von $f(x)$ aufgeht, stets vorhanden ist.

Herr Speiser hat in einer Arbeit [2]), die mir leider vor Abfassung der früheren Arbeit nicht bekannt war, mit Hilfe der Theorie der linearen Substitutionen in einem Galoisfelde allgemein für Zahlen einer rekurrenten Reihe die obige Kongruenzbedingung abgeleitet. Herr Tschebotaröw [3]) gibt mittels ähnlicher Hilfsmittel einen anderen Beweis dafür. Im folgenden will ich noch einen kurzen, ganz elementaren Beweis angeben und vor allem zeigen, was für die in der Diskriminante aufgehenden Primzahlen gilt. Das Resultat hatte ich in der früheren Arbeit (l. c.) bereits angekündigt.

1. Es sei

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

ein ganzzahliges, normiertes Polynom ohne mehrfache Wurzeln. p sei eine Primzahl, die nicht in $a_n = f(0)$ aufgeht. Dann besitzen die Potenzsummen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ eine Periode P modulo p. Es gilt dann die Darstellung

$$(x^P - 1) f'(x) \equiv f(x) K(x) \pmod{p},$$

wobei

$$K(x) = s_0 x^{P-1} + s_1 x^{P-2} + \cdots + s_{P-1}$$

ist. $f'(x)$ sei dabei nicht kongruent 0 mod. p, da dieser Fall trivial wäre. ($f'(x) \not\equiv 0$ ist sicher erfüllt, wenn $p > n$ ist, was wir später benötigen.)

---

[1]) U. Wegner, Über ein algebraisches Problem, Mathem. Annalen **105** (1931), S. 779—785.

[2]) A. Speiser, Die Zerlegung von Primzahlen in algebraischen Zahlkörpern, Transactions American Mathem. Society **23** (1922), S. 173—178.

[3]) N. Tschebotaröw, Die Probleme der modernen Galoisschen Theorie, Commentarii Mathematici Helvetici **17** (1933), S. 235—282, insbesondere S. 257—258.

Beweis. Es ist, formal nach fallenden Potenzen von x entwickelt,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots.$$

Also wird

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{s_0 x^{P-1} + s_1 x^{P-2} + \cdots + s_{P-1}}{x^P} + \frac{s_0 x^{P-1} + s_1 x^{P-2} + \cdots + s_{P-1}}{x^{2P}} + \cdots + p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t_{\nu-1}}{x^\nu},$$

d. h.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{K(x)}{x^P} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x^P}} + p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t_{\nu-1}}{x^\nu},$$

wobei die t_ν gewisse ganze Zahlen bezeichnen. Hieraus folgt

$$(x^P - 1) f'(x) = f(x) K(x) + pQ(x),$$

wobei jetzt $Q(x)$ ein ganzzahliges Polynom sein muß. Also wird

$$(1) \qquad (x^P - 1) f'(x) \equiv f(x) K(x) \pmod{p}.$$

2. Es sei

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

ein ganzzahliges, normiertes Polynom ohne mehrfache Wurzeln. $p > n$ sei eine Primzahl, die nicht in $a_n = f(0)$ aufgehe. Dann gilt: Der kleinste Exponent m, für den

$$p^m \equiv 1 \pmod{P}$$

ist, wobei P die Periode der Potenzsummen $s_0, s_1, \ldots$ mod. p von $f(x)$ bezeichnet, ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Grade der mod. p irreduziblen Faktoren von $f(x)$.

Beweis: Die Zerlegung von $f(x)$ in Potenzen mod. p verschiedener irreduzibler Faktoren sei

$$f(x) \equiv g_1(x)^{e_1} g_2(x)^{e_2} \cdots g_\varkappa(x)^{e_\varkappa} \pmod{p}.$$

Dann folgt aus (1) wegen der eindeutigen Zerlegung mod. p und der Voraussetzung $p > n$ (es genügt überdies, nur vorauszusetzen: $f'(x) \not\equiv 0 \pmod{p}$ und $(e_\nu, p) = 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa$), daß

$$x^P - 1 \equiv g_1(x)\, g_2(x) \cdots g_\varkappa(x)\, T(x) \pmod{p}$$

ist.

Sind nun $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ die bezüglichen Grade der Faktoren $g_\nu(x)$ und ist m ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, so ist

$$x^{p^m-1} - 1 \equiv g_1(x)\, g_2(x) \cdots g_\varkappa(x)\, R(x) \pmod{p}$$

mit einem gewissen ganzzahligen $R(x)$.

Ich behaupte nun, daß $P \mid p^m - 1$ ist. Denn wäre

$$d = (P, p^m - 1) < P,$$

so würde auch folgen

$$x^d - 1 \equiv g_1(x)\, g_2(x) \cdots g_\varkappa(x)\, L(x)$$

mit einem gewissen ganzzahligen $L(x)$, da

$$(x^P - 1, x^{p^m-1} - 1) = x^d - 1$$

ist. Dann ist auch

$$(x^d - 1)\, f'(x) \equiv f(x)\, M(x) \pmod{p},$$

und dabei ist der Grad des ganzzahligen Polynoms $M(x)$ nicht größer als $d - 1$. Also wird

$$M(x) = t_0 + t_1 x + \cdots + t_{d-1} x^{d-1}$$

und

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{M(x)}{x^d - 1} + p\,\frac{N(x)}{x^d - 1}$$
$$= \frac{t_0 + pq_0}{x} + \frac{t_1 + pq_1}{x^2} + \cdots + \frac{t_{d-1} + pq_{d-1}}{x^{d-1}} + \frac{t_0 + pq_d}{x^d} + \cdots,$$

und wegen der Eindeutigkeit der Entwicklung von $\frac{f'(x)}{f(x)}$ nach fallenden Potenzen von x folgt:

$$s_0 \equiv t_0, \quad s_1 \equiv t_1, \ldots, s_d \equiv t_0, \ldots \pmod{p},$$

d. h. d wäre schon die Periode von $s_0, s_1, \ldots$. Also ist P Teiler von $p^m - 1$. m ist aber auch der kleinste Exponent, für den

$$p^m \equiv 1 \pmod{P}$$

ist; denn sonst müßte

$$x^{p^r - 1} - 1 \equiv g_1(x)\, g_2(x) \cdots g_\varkappa(x)\, U(x) \pmod{p}$$

sein mit $r < m$, und r müßte durch alle Zahlen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ teilbar sein. Die kleinste Zahl, die diese Bedingung erfüllt, ist aber eben m.

3. Für jede Wurzel γ von $f(x) = 0$ gilt

$$\gamma^{Pp} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Beweis. Aus

$$x^P - 1 \equiv g_1(x)\, g_2(x) \cdots g_\varkappa(x)\, T(x) \pmod{p}$$

folgt durch Erheben in die p-te Potenz

$$(x^P - 1)^p \equiv g_1(x)^p\, g_2(x)^p \cdots g_\varkappa(x)^p\, T(x)^p \pmod{p},$$

also wegen $p > n$

$$x^{Pp} - 1 \equiv f(x)\, W(x) \pmod{p}.$$

Also ist für jede Wurzel γ von $f(x) = 0$

$$\gamma^{Pp} \equiv 1 \pmod{p}.$$

3a. Für den Fall, daß p nicht in der Gleichungsdiskriminante enthalten ist, folgt aus (1) bereits

$$\gamma^P \equiv 1 \pmod{p}.$$

4. Aus **3.** folgt, daß für jede Primzahl $p > n$ stets

$$(\gamma\gamma' \cdots \gamma^{(n-1)})^{Pp} \equiv ((-1)^n f(0))^P \equiv ((-1)^n a_n)^P \equiv 1 \pmod{p}$$

ist.

5. Die Periode P_β der Potenzsummen mod. p^β ($\beta > 1$) unterscheiden sich von P, der Periode mod. p, höchstens um eine Potenz von p:

$$P_\beta = p^\varepsilon P.$$

Beweis. Aus **3.** folgt, wenn man hinreichend oft potenziert,

$$\gamma^{Pp^\beta} \equiv 1 \pmod{p^\beta}.$$

Pp^β ist dann sicher ein Vielfaches der Periode P_β der Potenzsummen mod. p^β, d. h.

$$Pp^\beta = P_\beta t.$$

Andererseits muß P_β ein Vielfaches von P sein, d. h. $P_\beta = PV$; daraus folgt $V = p^\varepsilon$, w. z. b. w.

6. Es sei $f(x)$ ein ganzzahliges, normiertes, rational irreduzibles Polynom, und $p > n$ [4]) sei eine Primzahl, die nicht in $f(0)$ aufgehe. P sei die Periode der Potenzsummen mod. p. Ist dann m die kleinste Zahl, für die

$$p^m \equiv 1 \pmod{P}$$

ist, so ist m ein Teiler der Ordnung der galoisschen Gruppe von $f(x)$ über dem Bereich der rationalen Zahlen.

Beweis. Ist p nicht in der Gleichungsdiskriminante enthalten, so ist nach dem Dedekindschen Satze m die Ordnung derjenigen Permutationen in der Klasse aller Permutationen, die der Primzahl p nach Frobenius zugeordnet sind.

Ist p in der Gleichungsdiskriminante enthalten, so ist der Grad jedes einzelnen der irreduziblen Faktoren von $f(x)$ mod. p in dem Grad von mindestens einem der Primideale von p in dem von einer Wurzel γ von $f(x) = 0$ erzeugten Körper $\mathsf{P}(\gamma)$ als Teiler enthalten. D. h. das kleinste gemeinsame Vielfache der Grade der verschiedenen Primideale von p in $\mathsf{P}(\gamma)$ enthält das kleinste gemeinsame Vielfache m der Grade der verschiedenen mod. p irreduziblen Faktoren von $f(x)$ als Teiler. Die Primzahl p zerfällt aber in dem zu $f(x) = 0$ gehörigen galoisschen Körper in Primideale von solchem gleichem Grade, der durch das kleinste gemeinsame Vielfache der verschiedenen Primideale von p in $\mathsf{P}(\gamma)$ teilbar ist, also auch durch m. Der Grad der Primideale von p im galoisschen Körper zu $f(x) = 0$ ist aber als Index der zum Primideal gehörigen Trägheitsgruppe in bezug auf die Zerlegungsgruppe ein Teiler der Ordnung der ganzen Gruppe.

Beispiele und Bemerkungen.

1. $$f(x) = x^5 - 2x - 2.$$

$f(x)$ ist rational irreduzibel. Die Gleichungsdiskriminante ist

$$\Delta = 2^4 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 67.$$

Als Primzahl p wählen wir 3. Dies ist zulässig, da $x^5 - 2x - 2 \equiv (x-1)^2 (x^3 - x^2 + 1)$ (mod. 3) ist. Für die Periode mod. 3 ergibt sich dann $P = 26$. Aus

$$3^m \equiv 1 \pmod{26}$$

folgt

$$m = 3,$$

d. h. $p = 3$ zerfällt in $\mathsf{P}(\gamma)$ entweder in

$$(p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_3 \quad \text{oder} \quad (p) = \mathfrak{p}_1^2 \mathfrak{p}_3.$$

Dabei bedeuten die unteren Indizes die Grade der Primideale. Da p nur in der Körperdiskriminante und nicht im Index aufgeht, so tritt der letztere Fall ein. Da 3 in der Ordnung der galoisschen Gruppe aufgehen muß, und als solche nur 120, 60, 20, 10 und 5 in Frage kommt, da weiterhin Δ kein Quadrat ist, also 60 nicht in Betracht kommt,

[4]) Es genügt auch die geringere Voraussetzung von S. 186, Mitte. Für diese geringere Voraussetzung bleiben auch die Aussagen **4.** und **5.** bestehen, nur in der Behauptung **3.** muß es dann heißen:

$$\gamma^{Pp^\alpha} \equiv 1 \pmod{p},$$

wobei p^α die erste Potenz von p ist, die das Maximum der Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_\varkappa$ übertrifft.

so ist $f(x) = 0$ eine Gleichung ohne Affekt. Dies kann man übrigens auch aus der von Herrn v. d. Waerden gestellten Aufgabe [5]) entnehmen, die folgendermaßen lautet:

Eine rational-unzerlegbare ganzzahlige Gleichung

$$f(x) = x^5 + a_1 x^4 + \cdots + a_5 = 0,$$

deren Diskriminante D einen Primfaktor p genau in der ersten Potenz enthält, hat als galoissche Gruppe über dem rationalen Zahlkörper die symmetrische Gruppe.

Der Beweis ist sehr einfach. Er folgt unmittelbar daraus, daß als Ordnung der galoisschen Gruppe nur 20 oder 120 in Frage kommt. Die Ordnung 20 lieferte eine über dem Bereich der rationalen Zahlen auflösbare Gleichung. In der Diskriminante einer solchen geht aber eine Primzahl mindestens zur 2. Potenz auf [6]).

Man kann für $n = 5$ die Aufgabe auch noch dahin abändern:

Geht in der Diskriminante einer rational-unzerlegbaren ganzzahligen Gleichung eine Primzahl von der Form $4m + 3$ in ungerader Potenz auf, so ist die Gleichung ohne Affekt über dem Bereich der rationalen Zahlen.

2. $$f(x) = x^3 + 8x + 1.$$

$f(x)$ ist rational irreduzibel. Die Diskriminante ist

$$\Delta = -5^2 \cdot 83.$$

Für p wählen wir 5. Dann ist $P = 4$, d. h.

$$p^m \equiv 1 \pmod{P}$$

liefert $m = 1$. Also wird

$$(p) = \mathfrak{p}_1^3 \quad \text{oder} \quad (p) = \mathfrak{p}_1^2 \mathfrak{p}_1' \quad \text{oder} \quad (p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_1''.$$

Da die Körperdiskriminante $D = -83$ ist, so ist

$$(p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_1''.$$

Mod. 5^2 ist die Periode

$$P_2 = 20 = 5 \cdot 4,$$

und mod. 5^3 ist die Periode

$$P_3 = 500 = 5^3 \cdot 4.$$

3. $$f(x) = x^3 - 8x - 2.$$

$f(x)$ ist rational irreduzibel. Die Diskriminante ist

$$\Delta = 2^2 \cdot 5 \cdot 97.$$

Das ist zugleich auch die Körperdiskriminante. Als p wählen wir 5. Dann ist $P = 4$, und mod. 5^2 ist die Periode $P_2 = 20$, mod. 5^3 $P_3 = 100$. Aus

$$5^m \equiv 1 \pmod{4}$$

folgt $m = 1$. Also ist

$$(5) = \mathfrak{p}_1^3 \quad \text{oder} \quad (5) = \mathfrak{p}_1^2 \mathfrak{p}_1'.$$

Letzteres tritt ein, da

$$f(x) \equiv (x + 1)^2 (x - 2) \pmod{5}$$

ist.

---

[5]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **44** (1934), Aufgabe 171.

[6]) F. K. Schmidt, Zur Theorie der algebraisch auflösbaren Polynome und Zahlkörper vom Primzahlgrad, Sitz. Ber. d. Heidelb. Akad. 1929, S. 3—10. — U. Wegner, Über auflösbare Gleichungen vom Primzahlgrad I, Crelles Journal **168** (1932), S. 176—192, insbesondere S. 179—180.

4. Bemerkung.

Ist $f(x)$ selbst eine Primfunktion n-ten Grades mod. p, so ist P zugleich der Exponent e, zu dem $f(x)$ mod. p gehört. Dann ist nach **5.**

$$((-1)^n a_n)^e \equiv 1 \pmod{p}$$

oder wegen $p^n \equiv 1 \pmod{e}$

$$(-1)^n a_n \equiv g^{\frac{p^n-1}{e}} \pmod{p},$$

wobei g eine Primitivwurzel mod. p ist. Das ist eine Formel, die R. Church kürzlich benutzt hat, um beim Aufstellen einer Tafel von irreduziblen Polynomen für die ersten Primzahlmoduln diese zu kontrollieren [7]).

[7]) R. Church, Tables of irreducible polynomials for the first four prime moduli, Annals of Mathematics **36** (1935), S. 198—209.

Eingegangen 23. April 1935.